

Bayes-Lösungen für Sequenztests mit kontinuierlicher Zeit und nicht notwendig endlich vielen Hypothesen

INAUGURAL-DISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde
des
Fachbereichs Mathematik
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

vorgelegt von
Johann A. Mühlbauer
aus München

Marburg/Lahn 1977

Bayes-Lösungen für Sequenztests mit kontinuierlicher Zeit und nicht notwendig endlich vielen Hypothesen

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs Mathematik

der Philipps-Universität Marburg/Lahn

vorgelegt von

Johann A. Mühlbauer

aus München

Marburg/Lahn 1977



Vom Fachbereich Mathematik angenommen : 6. Oktober 1977

Tag der mündlichen Prüfung: 21. Oktober 1977

Berichterstatter: Prof. Dr. Volker Mammitzsch

Mitberichterstatter: Prof. Dr. Heinrich von Weizsäcker

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	S. 3
Vorbemerkungen, allgemeine Voraussetzungen und Bezeichnungen	S. 5
§1 Meßbare Korrespondenzen und optimale Auswahlfunktionen	S. 6
§2 Technische Vorbemerkungen	S. 19
§3 Das allgemeine sequentielle Testmodell nach H. Richter	S. 27
§4 Sequentielle Testprobleme 1. und 2. Art	S. 30
§5 Die Existenz von Bayes-Lösungen 1. Art	S. 40
§6 Die Existenz von Bayes-Lösungen 2. Art	S. 49
§7 Bayes-Lösungen für Sequenztests mit höchstens abzählbar vielen Hypothesen	S. 54
§8 Beispiele	S. 61
Anhang	
Literaturverzeichnis	



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Einleitung

H. Richter beschreibt in)11(ein Modell eines Sequenztests, welches, abweichend von der bis dahin geübten Praxis, keinen Bezug auf 'konkrete' Entscheidungsfunktionen nimmt. Das Richter'sche Modell arbeitet ausschließlich mit den 'Schäden', die durch die Entscheidung des Statistikers entstehen. Richter konnte in dieser Arbeit die Frage nach der Existenz 'optimaler' endlichstufiger Tests positiv beantworten. V. Mammitzsch hat diese Resultate auf den Fall unendlichstufiger)7(bzw. kontinuierlicher Tests)8(erweitern können. Bei allen diesen Arbeiten sind nur endlich viele Hypothesen zugelassen. K. Pilzweiger hat in)10(Existenzaussagen für 'optimale' endlichstufige Tests ohne Einschränkungen an die Mächtigkeit der Hypothesenmenge bewiesen. Die vorliegende Arbeit befaßt sich nun mit dem Fall kontinuierlicher Zeit und beliebig vieler Hypothesen. Die hier erzielten Ergebnisse sind dabei nicht die einzig denkbaren. Wie man sieht, hängt die Formulierung der behandelten Testprobleme insbesondere von den im ersten Paragraphen bewiesenen Sätzen vom Dubins-Savage-Typ ab. Andererseits lassen aber auch schon diese Sätze noch die Behandlung einer ganzen Reihe weiterer Testprobleme ($E = L_2$ usw.) zu. Wir hoffen, daß anhand unseres Vorgehens klar wird, wie man auch diese Testprobleme angehen kann. Darüberhinaus bleiben eine ganze Reihe weiterer Fragen offen, so die nach dem

Zusammenhang mit den anderen Modellen der sequentiellen Entscheidungstheorie oder die Frage nach der Existenz 'gleichmäßig optimaler' Tests.

Unser Vorgehen gliedert sich wie folgt. Wir beweisen zunächst zwei Sätze über die Existenz 'optimaler' Auswahlfunktionen zu gegebenen Korrespondenzen ('Dubins-Savage'-Sätze). Der zweite Paragraph umfaßt technische Vorbemerkungen, besonders hinsichtlich der verwendeten Integralbegriffe. An die Formulierung des allgemeinen Richter'schen Modells in Paragraph drei schließt sich die Formulierung der beiden Grundtypen sequentieller Testprobleme an, die in dieser Arbeit behandelt werden sollen. In den folgenden Abschnitten wird mithilfe der Sätze aus Paragraph eins die Existenz von Lösungen zu diesen beiden Grundtypen bewiesen. Die Ergebnisse aus der Theorie der optimalen Stopzeiten, die wir dabei ebenfalls verwenden, sind umgeschrieben auf unsere Terminologie in einem kurzen Anhang zusammengestellt. Nach einem 'Seitensprung' zum Fall abzählbarer Hypothesenmengen schließen wir mit der ausführlichen Diskussion dreier Beispiele.

Ich habe zu danken Herrn Raimund Rhiel für einen Hinweis zum Anhang und meinem Freund und Kollegen Gerhard Rothenberger für manche anregende und klärende Diskussion.

Vorbemerkungen, allgemeine Voraussetzungen und Bezeichnungen

Die in dieser Arbeit verwendeten topologischen Grundbegriffe stammen aus den Büchern von Köthe)5(und Dunford und Schwartz)4(. Für die Grundlagen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie verweisen wir auf das Buch von Meyer)9(.

(M, K) sei ein Meßraum; (X, τ_X) ein topologischer Raum, $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}_{\tau_X}$

die Borelsigmaalgebra über X ; $\mathcal{P}_0(X) := \{ Y \subset X : Y \neq \emptyset \}$, 2^X bezeichnet die Menge der nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen von X

Mit 1_A bezeichnen wir die Indikatorfunktion einer Menge A . Um Verwechslungen mit dem topologischen Abschluß ' $\bar{}$ ' auszuschließen, wird das Komplement einer Menge A mit $\bar{A}$ gekennzeichnet.

Ist d eine Metrik auf X , so bezeichne τ_d die durch die Metrik erzeugte Topologie.

Ist X ein linearer Raum über $\mathbb{R}$, X' ein Teilraum des algebraischen Dualraums X^* von X und bilden X und X' bezüglich der kanonischen Bilinearform ein Dualsystem (s.)5(S. 88) dann schreiben wir dafür kurz (X, X') und sprechen von einem dualen Paar. Seien x aus X und x' aus X' , dann steht $x'x$ für $x'(x)$. Mit $\mathcal{G}(X, X')$ bezeichnen wir die größte Topologie auf X , für die alle Funktionale x' aus X' stetig sind, entsprechend sei $\mathcal{G}(X', X)$ definiert.

Sei ferner $K \subset X$ gegeben. Mit $g(\cdot, K)$ bezeichnen wir die Stützfunktion von K , also die Abbildung $g(\cdot, K): X' \rightarrow \mathbb{R} := \mathbb{R} \{ + \infty \}$ gemäß $g(x', K) := \inf \{ x'x : x \in K \}$.

Eine Norm auf X werden wir mit $\|\cdot\|$ bezeichnen, die Normtopologie entsprechend mit $\tau_{\|\cdot\|}$.

' x ' steht für das kartesische Produkt, ' $\square$ ' für die Produktbildung von Sigmaalgebren oder Topologien. Ziffern in).(weisen auf das Literaturverzeichnis hin.

§1 Meßbare Korrespondenzen und optimale Auswahlfunktionen

(1.0) Definition

Eine Abbildung $\Gamma: M \rightarrow \mathcal{P}_0(X)$ heißt Korrespondenz von M nach X .

Gesucht sind Bedingungen an eine Korrespondenz Γ derart, daß es meßbare Funktionen (Auswahlfunktionen) $\gamma: (M, \mathbb{K}) \rightarrow (X, \mathcal{B}(X))$ gibt mit $\gamma(m)$ aus $\Gamma(m)$ für alle m aus M . Ausserdem sollen die Auswahlfunktionen noch gewissen Optimalitätskriterien genügen. Dazu formulieren wir zunächst zwei Meßbarkeitsbegriffe für Korrespondenzen.

(1.1) Definition

Sei $A \subset X$, Γ eine Korrespondenz von M nach X .

$\Gamma^{-1}(A) := \{ m \in M : \Gamma(m) \cap A \neq \emptyset \}$ heißt inneres Urbild von A bezüglich Γ .

(1.2) Definitionen

Sei Γ eine Korrespondenz von M nach X .

(1.2.0) Γ heißt $\mathbb{K}$ -innen-meßbar, wenn für alle O aus $\mathcal{T}_X$ das innere Urbild $\Gamma^{-1}(O)$ aus $\mathbb{K}$ ist.

(1.2.1) Sei (X, X') ein Dualsystem, $K' \subset X'$.

Γ heißt K' - $\mathbb{K}$ -meßbar, wenn für alle x' aus K' die Abbildung $g(x', \Gamma(\cdot)) : (M, \mathbb{K}) \rightarrow (R, \mathcal{B}(R))$ meßbar ist.

(1.3) Bemerkungen

(1.3.0) Sei (X, X') ein Dualsystem, $K' \subset X'$ und Γ eine $\mathbb{K}$ -innen-meßbare Korrespondenz, dann ist Γ K' - $\mathbb{K}$ -meßbar.

Bew.: Sei x' aus K' , c aus $\mathbb{R}$, $O := \{ x \in X : x'x < c \} \in \mathcal{T}_X$.

$\{ m \in M : g(x', \Gamma(m)) < c \} = \{ m \in M : \Gamma(m) \cap O \neq \emptyset \} = \Gamma^{-1}(O)$,
und dieses ist nach Voraussetzung aus $\mathbb{K}$.

(1.3.1) Die Umkehrung von (1.3.0) ist im allgemeinen falsch.

Bew.: $M := \{0, 1\}$ $K := \{M, \emptyset\}$, $X := \mathbb{R}$.

$$\Gamma(0) := [-1, 1] \quad , \quad \Gamma(1) := \{-1, +1\} \quad .$$

Da wir uns weiterhin auch für Familien von Korrespondenzen und für spezielle Familien (Prozesse) von Auswahlfunktionen interessieren, hier noch die Definitionen progressiv meßbarer Familien von Korrespondenzen.

(1.4) Definitionen

Sei $(K_z)_{0 \leq z < \infty}$ eine monoton wachsende Familie von Sigmaalgebren über M , $(\Gamma(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ eine Familie von Korrespondenzen von M nach X .

(1.4.0) $(\Gamma(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ heißt progressiv innen-meßbar bezüglich $(K_z)_{0 \leq z < \infty}$, wenn für alle s aus $[0, +\infty)$ die Einschränkung auf $M \times [0, s]$ der Korrespondenz Γ^x , definiert gemäß $\Gamma^x(m, z) := \Gamma(m, z)$, innen-meßbar bezüglich $K_s \otimes B([0, s])$ ist.

(1.4.1) Sei (X, X') ein Dualsystem, $K' \subset X'$.

$(\Gamma(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ heißt progressiv K' -meßbar bezüglich $(K_z)_{0 \leq z < \infty}$, wenn für alle s aus $[0, +\infty)$ die Einschränkung von Γ^x auf $M \times [0, s]$ $K' \otimes (K_s \otimes B([0, s]))$ -meßbar ist. '

(1.5) Bemerkungen

(1.5.0) (1.4.1) ist äquivalent mit:

(1.4.1)' $(g(x', \Gamma(\cdot, z)))_{0 \leq z < \infty}$ ist progressiv meßbar für alle x' aus K' .

(1.5.1) Wie bei stochastischen Prozessen (vgl. IV. 50 in)9() sind (1.4.0) bzw. (1.4.1) äquivalent dazu, daß Γ^x innen- bzw. K' -meßbar bezüglich der Sigmaalgebra der progressiv meßbaren Mengen ist.

(1.5.2) Sei T eine (endliche) Stopzeit der Familie $(K_z)_{0 \leq z < \infty}$ und $(\Gamma(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ progressiv innen- bzw. K' -meßbar.

Dann ist die Korrespondenz Γ_T definiert durch

$$\Gamma_T(m) := \Gamma(m, T(m)) \quad K_T\text{-innen- bzw. } K'\text{-}K_T\text{-meßbar.}$$

Bew.:

a) Die Aussage für die progressiv K' -meßbare Familie folgt wegen (1.5.0) unmittelbar aus IV. T49 in)9(.

b) Sei nun $(\Gamma(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ progressiv innen-meßbar, s aus $[0, +\infty)$ $h(\cdot; s): M \rightarrow (M \times [0, s])$, definiert gemäß

$$h(m; s) := (m, \min(T(m), s)), \text{ ist } K_s\text{-}(K_s \text{meß}([0, s])) \text{ meßbar.}$$

Sei O aus $\mathcal{F}_X$ beliebig.

$$\Gamma_T^{-1}(O) \cap \{T \leq s\} = h^{-1}(\cdot; s) \left(\underbrace{\{(m, z) : z \leq s, \Gamma(m, z) \cap O \neq \emptyset\}}_{\in K_s \text{meß}([0, s])} \right) \cap \{T \leq s\}$$

Als nächstes bringen wir eine wichtige Aussage über die Existenz allgemeiner Auswahlfunktionen, die wir als Hilfsmittel für unsere weiteren Konstruktionen benötigen.

(1.6) Satz (Kuratowski, Ryll-Nardzewski, Castaing)

Sei $(X, \mathcal{A}_d)$ ein polnischer Raum; Γ eine $\mathbb{K}$ -innen-meßbare Korrespondenz.

Dann existiert eine Folge meßbarer Funktionen $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$\gamma_n: (M, \mathbb{K}) \rightarrow (X, \mathcal{B}(X))$, so, daß für alle m aus M $\overline{\Gamma(m)} = \overline{\{\gamma_n(m) : n \in \mathbb{N}\}}$ gilt.

Beweis:

Theorem III.7 aus [2] (unter Beachtung der Tatsache, daß in einem topologischen Raum X für $A \subset X$ beliebig, $O \subset X$ offen gilt:

$$A \cap O \neq \emptyset \Leftrightarrow \overline{A} \cap O \neq \emptyset.$$

Wir kommen jetzt zu den angekündigten Sätzen vom Dubins-Savage

Typ. (Eine Zusammenstellung weiterer Sätze dieser Art findet man in §9 [15].)

Zuerst definieren wir, was wir unter (ξ) -optimalen Auswahlfunktionen verstehen wollen.

(1.7) Definitionen

Seien ein Dualsystem (X, X') , eine Funktion $u': M \rightarrow X'$ und eine Korrespondenz Γ von M nach X gegeben.

Eine Auswahlfunktion γ der Korrespondenz Γ heißt

(1.7.0) u' - ξ -optimal für $\xi > 0$, wenn

$$u'(m)\gamma(m) - g(u'(m), \Gamma(m)) \leq \xi,$$

(1.7.1) u' -optimal, wenn $u'(m)\gamma(m) = g(u'(m), \Gamma(m))$ für alle m aus M gilt.

Wir beweisen jetzt als erstes einen Satz über die Existenz meßbarer ξ -optimaler Auswahlfunktionen.

(1.8) Satz

Sei $(X, \tau_{||})$ ein separabler Banachraum, X' sein topologischer Dualraum, $\tau_{X'}$ eine solche Topologie, daß die Abbildungen $X' \rightarrow \mathbb{R}$ gemäß $x' \mapsto x'x$ stetig sind für alle x aus X .

Seien ferner $u': (M, \mathbb{K}) \rightarrow (X', {}^B\tau_{X'})$ eine meßbare Abbildung und Γ eine $\mathbb{K}$ -innen-meßbare Korrespondenz von M nach X mit Werten in 2^X . Es sei $g(x', \Gamma(m)) > -\infty$ für alle m aus M und alle x' aus X' .

(1.8.0) Dann ist die Funktion $g(u'(\cdot), \Gamma(\cdot)) : (M, \mathbb{K}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ meßbar.

(1.8.1) Für alle $\xi > 0$ existiert zu Γ eine meßbare u' - ξ -optimale meßbare Auswahlfunktion $\gamma_\xi : (M, \mathbb{K}) \rightarrow (X, \mathcal{B}(X))$.

Beweis:

1.) Nach (1.6) existieren $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $\gamma_i : (M, \mathbb{K}) \rightarrow (X, \mathcal{B}(X))$ meßbar, mit $\Gamma(m) = \overline{\{\gamma_i(m) : i \in \mathbb{N}\}}$.

Es ist (vgl. Castaing) 2(Lemma III.14)

$u'(\cdot) \gamma_i(\cdot) : (M, \mathbb{K}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ meßbar für alle i aus $\mathbb{N}$.

Damit gilt (1.8.0) wegen $g(u'(m), \Gamma(m)) = \inf \{ u'(m) \gamma_i(m) : i \in \mathbb{N} \}$.

$$2.) \quad M_{i,n} := \{ m \in M : u'(m) \gamma_i(m) - g(u'(m), \Gamma(m)) < 2^{-n} \}$$

ist wegen (1.8.0) für jedes (i,n) aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aus K .

Wegen $g(u'(m), \Gamma(m)) = \inf \{ u'(m) \gamma_i(m) : i \in \mathbb{N} \}$ gilt

$$M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_{i,n} \quad \text{für alle } n \text{ aus } \mathbb{N}.$$

Sei nun $\hat{M}_{i,n} := M_{i,n} \cap \left(\bigcup_{r < i} M_{r,n} \right)$ und

$$\hat{\gamma}_n: M \rightarrow X \quad \text{gemäß} \quad \hat{\gamma}_n(m) := \sum_{i \in \mathbb{N}} \gamma_i(m) 1_{\hat{M}_{i,n}}(m),$$

dann gilt nach Konstruktion:

$\hat{\gamma}_n: (M, K) \rightarrow (X, B(X))$ ist meßbar,

$\hat{\gamma}_n(m)$ ist aus $\Gamma(m)$ und

$$u'(m) \hat{\gamma}_n(m) - g(u'(m), \Gamma(m)) < 2^{-n} \quad \text{für alle } m \text{ aus } M$$

und alle n aus $\mathbb{N}$.

Um die Existenz optimaler Auswahlfunktionen beweisen zu können benötigen wir einige weitere Voraussetzungen.

(1.9) Satz

Sei $(M, \mathbb{K}, p)$ ein vollständiges W-Feld, $(X, \tau_{X'})$ ein separabler Banachraum, X' sein topologischer Dualraum versehen mit einer Topologie $\tau_{X'}$, so, daß die Abbildungen $x' \mapsto x'x$ von $(X', \tau_{X'}) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind für alle x aus X .

Sei $K' \subset X'$ und Γ eine $\mathbb{K}$ -innen-meßbare Korrespondenz von M nach X , für die gilt:

- a) $g(x', \Gamma(m)) > -\infty$ für alle m aus M und alle x' aus K' ;
- b) $\Gamma(m)$ ist $G(X, X')$ - und damit auch normabgeschlossen;
- c) für alle m aus M existiert $\epsilon(m) > 0$ so, daß für alle x' aus K' die Menge $\{x \in X : x'x \leq g(x', \Gamma(m)) + \epsilon(m)\} \cap \Gamma(m)$ $G(X, X')$ -kompakt ist.

Dann existiert zu jeder meßbaren Abbildung

$u' : (M, \mathbb{K}) \rightarrow (X', \tau_{X'})$ mit $u'(M) \subset K'$ eine u' -optimale Auswahlfunktion der Korrespondenz Γ .

Beweis:

$$1.) \Delta(m) := \{x \in X : u'(m)x = g(u'(m), \Gamma(m))\} \cap \Gamma(m)$$

ist $G(X, X')$ - und normabgeschlossen.

Beh: $\Delta(m) \neq \emptyset$.

Bew.: Nach b) und c) existiert $\epsilon(m) > 0$ so, daß

$$\{x \in X : u'(m)x \leq g(u'(m), \Gamma'(m)) + \epsilon(m)\} \cap \Gamma'(m)$$

$G(X, X')$ -kompakt ist. Damit sind auch für alle $0 < \epsilon \leq \epsilon(m)$

die nichtleeren Mengen

$$\{x \in X : u'(m)x \leq g(u'(m), \Gamma'(m)) + \epsilon\} \cap \Gamma'(m) \quad G(X, X')\text{-kompakt.}$$

Ferner gilt

$$\Delta(m) = \bigcap_{\epsilon > 0} \{x \in X : u'(m)x \leq g(u'(m), \Gamma'(m)) + \epsilon\} \cap \Gamma'(m),$$

also ist $\Delta(m) \neq \emptyset$.

2.) Nach)2(III, 13. gilt:

$$\{(m, x) : x \in \Gamma'(m)\} \text{ ist aus } K_{\text{IB}}(X).$$

Nach (1.8.0) folgt dann:

$$\{(m, x) : x \in \Delta(m)\}$$

$$= \{(m, x) : x \in \Gamma'(m)\} \cap \{(m, x) : u'(m)x - g(u'(m), \Gamma'(m)) = 0\}$$

ist ebenfalls aus $K_{\text{IB}}(X)$.

Aus der Vollständigkeit von (M, K, p) und 3.4 in)3(folgt daraus:

Für alle O aus $\mathcal{T}_X$ ist

$$\Delta^{-1}(O) = \text{proj}_M(\{(m, x) : x \in \Delta(m) \cap O\}) \text{ aus } K, \text{ d. h.}$$

Δ ist IK -innen-meßbar.

3.) Wegen der Abgeschlossenheit von $\Delta(m)$ für alle m aus M folgt die Behauptung unmittelbar aus (1.6) und 1.) und 2.) .

Die Bedingung der Vollständigkeit des W -Feldes (M, K, p) in (1.9) hindert uns, diesen Satz unmittelbar in eine Aussage über u' -optimale Auswahlprozesse umzuschreiben. Es gilt aber das folgende Korollar.

(1.10) Korollar

Sei (M, K, p) ein vollständiges W -Feld, $(K_z)_{0 \leq z < \infty}$ eine monoton wachsende Familie von Untersigmaalgebren von K und es sei

$$\{N \in K : p(N) = 0\} \subset K_0.$$

$(X, \tau_{||})$ sei ein separabler Banachraum, X' sein topologischer Dualraum versehen mit einer Topologie $\tau_{X'}$, so, daß die Abbildungen $x' \mapsto x'x$ von $(X', \tau_{X'})$ nach $\mathbb{R}$ stetig sind für alle x aus X .

Ferner sei eine bezüglich $(K_z)_{0 \leq z < \infty}$ progressiv innen-meßbare Familie von Korrespondenzen $(\Gamma(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ von M nach X gegeben.

Sei $K' \subset X'$ und es gelte:

- a) $g(x', \Gamma(m, z)) > -\infty$ für alle (m, z) aus $M \times [0, +\infty)$ und alle x' aus K' ;
- b) $\Gamma(m, z)$ ist $\mathcal{G}(X, X')$ -abgeschlossen für alle (m, z) aus $M \times [0, +\infty)$;
- c) für alle (m, z) aus $M \times [0, +\infty)$ existiert $\xi(m, z) > 0$ so, daß für alle x' aus K' die Menge

$$\{x \in X : x'x \leq g(x', \Gamma(m, z)) + \xi(m, z)\} \cap \Gamma(m, z)$$

$\mathcal{G}(X, X')$ -kompakt ist.

Dann existiert zu jedem progressiv meßbaren stochastischen Prozeß $(u'(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$, $u'(\cdot, z) : M \rightarrow X'$ für alle z aus $[0, +\infty)$, mit $u'(m, z) \in K'$ für alle (m, z) aus $M \times [0, +\infty)$ und jede endliche Stopzeit T der Familie $(K_z)_{0 \leq z < \infty}$ eine u'_T -optimale, K_T -meßbare Auswahlfunktion γ_T der Korrespondenz Γ_T , d.h. eine meßbare Funktion $\gamma_T : (M, K_T) \rightarrow (X, B(X))$ mit $\gamma_T(m) \in \Gamma_T(m)$ und $u'_T(m) \gamma_T(m) = g(u'_T(m), \Gamma_T(m))$ für alle m aus M .

Beweis:

Nach Voraussetzung ist $(M, K_T, p|_{K_T})$ vollständig, die Korrespondenz Γ_T und die Funktion u'_T erfüllen die Voraussetzungen von (1.9) (siehe (1.5.2)) und damit folgt aus (1.9) die Behauptung.

Zum Abschluß dieses Paragraphen folgen nun noch zwei Aussagen über optimale Auswahlen bei K' - K -meßbaren Korrespondenzen.

(1.11) Satz

(X, X') sei ein duales Paar; X' sei mit einer bezüglich des dualen Paares zulässigen (siehe Köthe) (S. 239) lokal-konvexen, metrisierbaren Topologie $\tau_{X'}$ separabel. $K' \subset X'$ sei ein konvexer Kegel, d.h. mit x' und y' aus K' ist auch $t_1 x' + t_2 y'$ aus K' für t_1 und t_2 aus $[0, +\infty)$, und K' trenne die Punkte von X .

Sei Γ eine K' - K -meßbare Korrespondenz von M in X mit:

- a) $\Gamma(m)$ ist konvex und $\mathcal{G}(X, X')$ -abgeschlossen für alle m aus M ;
- b) $g(x', \Gamma(m)) > -\infty$ für alle x' aus X' und alle m aus M ;
- c) für alle m aus M existiere $x'(m)$ aus X' so, daß $g(\cdot, \Gamma(m))$ in $x'(m)$ stetig ist.

Sei ferner $u': (M, \mathcal{K}) \rightarrow (X', \mathcal{B}(X'))$ meßbar und es gelte: $u'(m)$ ist aus K' für alle m aus M .

Dann existiert eine u' -optimale Auswahlfunktion γ der Korrespondenz

Γ derart, daß für alle x' aus $\text{span} K'$ die Funktion

$x' \gamma(\cdot) : (M, \mathcal{K}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ meßbar ist.

Beweis:

Aus a), b) und c) folgt (siehe)14(Beweis von (4.1) Teil 1) die Stetigkeit der Funktion $g(\cdot, \Gamma(m)) : (X', \mathcal{T}_{X'}) \rightarrow \mathbb{R}$ für alle m aus M . Damit sind insbesondere für alle w und v aus $\mathbb{N}$ und alle x' aus K die Funktionen $g(w^{-1}x' + (1-w^{-1})(x' + vu'(\cdot)), \Gamma(\cdot))$ und $g(w^{-1}x' + (1-w^{-1})u'(\cdot), \Gamma(\cdot))$, beide von $(M, \mathcal{K})$ nach $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, meßbar.

Sei nun $(x'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dicht in K' , dann trennt auch die Familie $(x'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ die Punkte von X .

Nach)14(Satz (3.3) existiert für jedes m aus M die

$(u'(m), x'_i : i \in \mathbb{N})$ - Ecke von $\Gamma(m)$. Wir wollen sie mit $\gamma^*(m)$ bezeichnen. (Zum Begriff der Ecke siehe z.B.)14()

Es gilt, daß $\gamma^*(m)$ aus $\Gamma(m)$ ist und $u'(m) \gamma^*(m) = g(u'(m), \Gamma(m))$.

Wir definieren induktiv eine Folge von Funktionen $(g_i)_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$,

$g_i: K' \times M \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g_0(x', m) := \lim_{v \rightarrow \infty} \lim_{w \rightarrow \infty} (g(w^{-1}x' + (1-w^{-1})(x' + vx'(m)), l'(m)) \\ - v g(w^{-1}x' + (1-w^{-1})u'(m), l'(m))) \quad \text{und}$$

$$g_i(x', m) := \lim_{v \rightarrow \infty} \lim_{w \rightarrow \infty} \left(\sup_{j < i} g_j(w^{-1}x' + (1-w^{-1})(x' + vx'_1)) \right. \\ \left. - v \sup_{j < i} g_j(w^{-1}x' + (1-w^{-1})x'_1) \right).$$

Wegen der Kegeleigenschaft von K' sind alle diese Funktionen wohldefiniert, und da $g_0(x', \cdot)$ nach unserer eingangs gemachten Bemerkung für festes x' aus K' meßbar ist, sind für festes x' auch alle $g_i(x', \cdot)$, $i \in \mathbb{N}$, meßbar.

Sei nun x' aus K' beliebig, dann gilt $x' j^*(m) = g(x', \{y(m)\})$.

Nach Satz (3.2) aus [14] gilt:

$$g(x', \{y(m)\}) = \sup \{ g_i(x', m) : i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \}.$$

Also ist $x' j^*(\cdot)$ meßbar und der Satz ist bewiesen.

(1.12) Korollar

Es seien die Voraussetzungen des ersten Abschnitts aus (1.11) erfüllt.

$(\mathbb{K}_z)_{0 \leq z < \infty}$ sei eine monoton wachsende Familie von Sigmaalgebren über

M . $(\Gamma(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ sei eine bezüglich $(\mathbb{K}_z)_{0 \leq z < \infty}$ progressiv K' -meß-

bare Familie von Korrespondenzen derart, daß die Korrespondenz l^{-x}

(siehe (1.4)) die Bedingungen a), b) und c) aus (1.11) erfüllt.

Sei ferner $(u'(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$, $u'(\cdot, z) : M \rightarrow X'$ für alle z aus $[0, +\infty)$, progressiv meßbar und $u'(m, z)$ aus K' für alle (m, z) aus $M \times [0, +\infty)$.

Dann existiert ein stochastischer Prozeß $(y(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ so, daß für alle z aus $[0, +\infty)$ die Funktion $y(\cdot, z)$ eine $u'(\cdot, z)$ -optimale Auswahlfunktion der Korrespondenz $\Gamma(\cdot, z)$ ist.

Ausserdem ist für alle x' aus $\text{span} K'$ der stochastische Prozeß

$(x'y(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ progressiv meßbar.

Beweis:

(1.11) und (1.5.1).

§2 Technische Vorbemerkungen

Wir werden in dieser Arbeit zwei verschiedene Integralbegriffe für vektorwertige Funktionen benutzen. Dabei legen wir einen Wahrscheinlichkeitsraum $(M, \mathbb{K}, p)$ und einen Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ zugrunde. X' bezeichne einen Teilraum des topologischen Dualraums von X .

(2.0) Definitionen

- (2.0 0) $f: (M, \mathbb{K}, p) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ heißt p-meßbar, wenn es eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathbb{K}$ -einfacher (siehe 4) Funktionen (mit Werten in X) so gibt, daß für n gegen $+\infty$ die Folge der Normdifferenzen $\|f_n - f\|$ p-fast überall gegen 0 strebt.
- (2.0 1) $f: (M, \mathbb{K}, p) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ heißt (X, X') -meßbar bezüglich $\mathbb{K}$, wenn für alle x' aus X' die Abbildung $x'f: (M, \mathbb{K}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ meßbar ist.

Wie verhalten sich nun diese Meßbarkeitsbegriffe zueinander und welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen Meßbarkeitsbegriffen und der Meßbarkeit zwischen Meßräumen, die wir bisher immer benutzt haben?

(2.1) Bemerkung

(2.1.0) $(M, \mathbb{K}, p)$ sei vollständig und der Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ separabel, X' sein topologischer Dualraum.

$f: (M, \mathbb{K}, p) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ ist genau dann p -meßbar, wenn

a) f aufgefaßt als Funktion zwischen den Meßräumen $(M, \mathbb{K})$ und $(X, \mathcal{B}(X))$ meßbar ist oder

b) f (X, X') -meßbar bezüglich $\mathbb{K}$ ist.

(2.1.1) $f: (M, \mathbb{K}) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ ist genau dann (X, X') -meßbar bezüglich $\mathbb{K}$, wenn $f: (M, \mathbb{K}) \rightarrow (X, \sigma(X, X'))$ meßbar ist.

Doch nun zu den benutzten Integralbegriffen.

(2.2) Definitionen

(2.2.0) Sei $f: (M, \mathbb{K}, p) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ $\mathbb{K}$ -einfach, also $f = \sum_{i=1}^n x_i \cdot 1_{A_i}$

mit x_i aus X und disjunkten A_i aus $\mathbb{K}$, $i=1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$.

Dann heißt $\sum_{i=1}^n x_i p(A_i) =: \int_M f(m) dp(m)$ das Integral von f .

(2.2.1) Eine p -meßbare Funktion $f: (M, \mathbb{K}, p) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ heißt stark p -integrierbar, wenn es eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathbb{K}$ -einfacher Funktionen gibt so, daß

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ p -fast sicher gegen f konvergiert und

$$\lim_{i, n \rightarrow \infty} \int_M |f_i(m) - f_n(m)| dp(m) = 0 \text{ gilt.}$$

Der dann existierende und von der Wahl von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängige

(4) (III.2.16) Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n(m) dp(m)$ heißt starkes p -Integral von f und wird mit

$\int_M f(m) dp(m)$ bezeichnet.

(2.2.2) $f: (M, \mathbb{K}, p) \rightarrow (X, \tau_{\mu})$ heißt p -(X, X')-integrierbar, wenn für alle x' aus X' die Funktion $x'f: (M, \mathbb{K}, p) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ integrierbar ist.

Das (X, X') -Integral von f , (X, X') - $\int_M f(m) dp(m)$, ist durch die Gleichung $x'((X, X')$ - $\int_M f(m) dp(m)) = \int_M x'f(m) dp(m)$, für alle x' aus X' , erklärt.

(2.3) Bemerkung

Sei $f: (M, \mathbb{K}, p) \rightarrow (X, \tau_{\mu})$ p -meßbar, dann ist f genau dann stark p -integrierbar, wenn $\|f\|$ p -integrierbar ist.

Bew.:)4(III.2.22.

Das (X, X') -Integral einer Funktion ist nach Definition ein Element des algebraischen Duals von X' . Besonders interessant sind nun die Fälle, in denen das (X, X') -Integral wieder in X liegt.

(2.4) Lemma

(X, τ_{μ}) sei separabel, X' sein topologischer Dualraum. Dann liegt für jede p -(X, X')-integrierbare Funktion $f: (M, \mathbb{K}, p) \rightarrow (X, \tau_{\mu})$, für die außerdem die Funktion $\|f\|: (M, \mathbb{K}, p) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ integrierbar ist, das (X, X') -Integral in X .

Beweis:

Da (X, τ_{μ}) separabel ist, ist f p -meßbar, also nach (2.3) stark p -integrierbar. Das starke Integral ist gleich dem schwachen.

Im zweiten Teil dieses Paragraphen beweisen wir zwei Lemmata über Meßbarkeitseigenschaften stochastischer Prozesse auf Produkträumen. Wir setzen dabei immer folgendes voraus:

- $(K_z)_{0 \leq z \leq +\infty}$ sei eine monoton wachsende, rechtsstetige Familie von Sigmaalgebren über M ; p ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (M, K_∞) ;
 (M, K_∞, p) sei vollständig und K_0 enthalte alle K_∞ -Nullmengen;
 (θ, D, π) sei ein vollständiges Wahrscheinlichkeitsfeld.

(2.5) Definitionen

- (2.5.0) $(\hat{H}_z)_{0 \leq z \leq +\infty}$ sei definiert gemäß $\hat{H}_z := K_z \otimes D$,
 (2.5.1) $(\hat{H}_z)_{0 \leq z \leq +\infty}$ sei definiert gemäß $\hat{H}_\infty := H_\infty$,
 $\hat{H}_z := \bigcap_{s > z} H_s$ sonst,
 (2.5.2) $(H_z)_{0 \leq z \leq +\infty}$ sei definiert wie folgt:
 H_∞ sei die Vervollständigung von $\hat{H}_\infty$ bezüglich $p \otimes \pi$,
 $H_z := \{ A \in H_\infty : \text{es existiert } B \in \hat{H}_z \text{ mit } p \otimes \pi(A \Delta B) = 0 \}$.
 (2.5.3) Sei T eine Stopzeit der Familie $(K_z)_{0 \leq z \leq +\infty}$ und
 $T^x : M \times \theta \rightarrow [0, +\infty]$, die durch $T^x(m, \theta) := T(m)$ gegebene
 Stopzeit der Familie $(H_z)_{0 \leq z \leq +\infty}$, dann sei
 $H_T := H_{T^x}$.

Die $(\hat{H}_z)_{0 \leq z \leq +\infty}$ und $(H_z)_{0 \leq z \leq +\infty}$ haben die folgenden Eigenschaften.

(2.6) Folgerungen

(2.6.0) $\mathbb{H}_z \supseteq \hat{\mathbb{H}}_z \supseteq \tilde{\mathbb{H}}_z$ und $\mathbb{H}_z \supset \{ N \in \mathbb{H}_\infty : p \# \pi(N) = 0 \}$ für alle z aus $[0, +\infty]$;

(2.6.1) $\mathbb{H}_z$ ist für alle z aus $[0, +\infty]$ eine Sigmaalgebra;

(2.6.2) $(\hat{\mathbb{H}}_z)_0 \leq z \leq +\infty$ und damit auch $(\mathbb{H}_z)_0 \leq z \leq +\infty$ sind rechtsstetig.

(2.6.3) Es gilt $\mathbb{K}_T \# \mathbb{D}$ ist enthalten in $\mathbb{H}_T$ für jede Stopzeit T der Familie $(\mathbb{K}_z)_0 \leq z \leq +\infty$.

Beweis:

(2.6.0) folgt aus der Monotonie von $(\hat{\mathbb{H}}_z)_0 \leq z \leq +\infty$ und den Gleichungen $\emptyset \Delta C = C$ und $C \Delta C = \emptyset$ für alle C aus $M \times \Theta$.

(2.6.1) Sei A aus $\mathbb{H}_z$, B die zugehörige Menge aus $\hat{\mathbb{H}}_z$, dann gilt
 $[A \Delta B] = A \Delta B$ also $[A$ aus $\mathbb{H}_z$.

Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus $\mathbb{H}_z$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von zugehörigen Elementen aus $\hat{\mathbb{H}}_z$. Es gilt

$$p \# \pi \left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \Delta \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \right) \leq p \# \pi \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \Delta B_n) \right) = 0.$$

(2.6.2) $(\hat{\mathbb{H}}_z)_0 \leq z \leq +\infty$ ist rechtsstetig nach Definition.

Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, die monoton von rechts gegen z_0 aus $[0, +\infty)$ konvergiert, $A \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{H}_{z_n}$.

Es existieren $\hat{A}_n$ aus $\hat{\mathbb{H}}_{z_n}$ mit $p \# \pi(A \Delta \hat{A}_n) = 0$ für alle

n aus $\mathbb{N}$; o. B. d. A. sei $(\hat{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend. Dann ist

$$B := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{A}_n \text{ aus } \hat{\mathbb{H}}_{z_n} \text{ für alle } n \text{ aus } \mathbb{N}, \text{ also aus } \hat{\mathbb{H}}_{z_0}.$$

$$\text{Es gilt dann } p \# \pi(A \Delta B) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} p \# \pi(A \Delta \hat{A}_n) = 0.$$

- (2.6.3) Es gilt $\{(m, \theta) : T^X(m, \theta) \leq t\} = \{m : T(m) \leq t\} \times \theta$
 und damit für alle $A \in \mathbb{K}_T$ und alle $B \in \mathbb{D}$ dann
 $(A \times B) \cap (\{(m, \theta) : T^X(m, \theta) \leq t\}) = (A \cap \{m : T(m) \leq t\}) \times B \in \mathbb{H}_t$
 für alle t aus $[0, +\infty]$.

Für Funktionen auf $M \times \theta$ gelten die folgenden Eigenschaften.

(2.7) Lemma

- (2.7.0) Sei $\hat{G} : M \times \theta \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar bezüglich $\hat{\mathbb{H}}_Z$, dann ist
 $\hat{G}(m, \cdot) : \theta \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar bezüglich $\mathbb{D}$ für alle m aus M .
- (2.7.1) Sei $G : M \times \theta \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar bezüglich $\mathbb{H}_Z$, dann existiert
 $\hat{G} : M \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar bezüglich $\hat{\mathbb{H}}_Z$ so, daß
 $G(m, \theta) = \hat{G}(m, \theta)$ außerhalb einer $\mathbb{H}_\infty$ -Nullmenge gilt.
- (2.7.2) Sei $G : M \times \theta \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar bezüglich $\mathbb{H}_Z$, dann ist
 $G(m, \cdot) : \theta \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar bezüglich $\mathbb{D}$ außerhalb einer $\mathbb{K}_\infty$ -Nullmenge.

Beweis:

(2.7.0) ist klar.

- (2.7.1) Es existiert eine Folge $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathbb{H}_Z$ -einfacher Funktionen
 mit $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(m, \theta) = G(m, \theta)$ für alle (m, θ) aus $M \times \theta$.

Es existieren nach Definition der $\mathbb{H}_Z$ - $\hat{\mathbb{H}}_Z$ -einfache Funktionen
 $\hat{G}_n$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{G}_n(m, \theta) = G(m, \theta)$ außerhalb einer $\mathbb{K}_\infty$ -Nullmenge
 N . Insbesondere ist also die $\hat{\mathbb{H}}_Z$ -meßbare Menge N_L , auf
 der dieser Limes nicht existiert, eine Teilmenge von N .

$\hat{G} := \lim_{n \rightarrow \infty} G_n^1 \mathbb{1}_{NL}$ ist dann die gesuchte Funktion.

(2.7.2) Sei $\hat{G}$ nach (2.7.1) gewählt.

$\{m \in M : G(m, \cdot) \text{ ist nicht meßbar bez. } \mathbb{D}\}$

$\subset \{m \in M : \pi(\{ \theta \in \Theta : G(m, \theta) \neq \hat{G}(m, \theta) \}) > 0 \}$

Die letzte Menge ist aber wegen (2.7.1) eine $\mathbb{K}_{\infty}$ -Nullmenge.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zu den angekündigten Lemmata.

(2.8) Lemma

Sei $(G^{\theta}(\cdot, \cdot, z))_{0 \leq z \leq +\infty}$ ein an $(\mathbb{H}_z)_{0 \leq z \leq +\infty}$ adaptierter, rechtsstetiger stochastischer Prozeß mit Werten in $\mathbb{R}$. Dann existiert ein an $(\mathbb{H}_z)_{0 \leq z \leq +\infty}$ adaptierter, rechtsstetiger stochastischer Prozeß $(G(\cdot, \cdot, z))_{0 \leq z \leq +\infty}$ so, daß

$G(m, \cdot, z) : (\Theta, \mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar ist für alle $(m, z) \in M \times [0, +\infty]$ und für alle m außerhalb einer $\mathbb{K}_{\infty}$ -Nullmenge gilt:

$G(m, \theta, z) = G^{\theta}(m, \theta, z)$ für alle θ aus Θ und alle z aus $[0, +\infty]$.

Beweis:

$N := \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q = +\infty}} \{m \in M : G^{\theta}(m, \cdot, q) : (\Theta, \mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist nicht meßbar}\}$

N ist eine $\mathbb{K}_{\infty}$ -Nullmenge nach (2.7.2), also $N \times \Theta$ eine $\mathbb{H}_{\infty}$ -Nullmenge.

Damit ist $G(\cdot, \cdot, z) := G^{\theta}(\cdot, \cdot, z) \mathbb{1}_{(N \times \Theta)}$ ein rechtsstetiger stochastischer Prozeß, an $(\mathbb{H}_z)_{0 \leq z \leq +\infty}$ adaptiert, der die zweite Behauptung des Lemmas erfüllt.

Wegen der Rechtsstetigkeit von $(G'(\cdot, \cdot, z))_{0 \leq z \leq +\infty}$ gilt außerdem, daß $\{m \in M : G'(m, \cdot, z) : (0, \mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist meßbar}\}$ das Komplement von N umfaßt, also ist auch die erste Behauptung des Lemmas bewiesen.

(2.9) Lemma

Sei $(G(\cdot, \cdot, z))_{0 \leq z \leq +\infty}$ ein an $(\mathbb{H}_z)_{0 \leq z \leq +\infty}$ adaptierter stochastischer Prozeß mit Werten in $\mathbb{R}$, für den $G(\cdot, \cdot, z)$ $\mathbb{P} \otimes \pi$ -integrierbar ist für alle z aus $[0, +\infty]$ und außerdem $G(m, \cdot, z) : (0, \mathbb{D}, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist für alle (m, z) aus $M \times [0, +\infty]$, dann ist $(\int_0^\cdot G(\cdot, \cdot, z) d\pi(\cdot))_{0 \leq z \leq +\infty}$ ein an $(\mathbb{K}_z)_{0 \leq z \leq +\infty}$ adaptierter stochastischer Prozeß.

Beweis:

$\int_0^\cdot G(\cdot, \cdot, \infty) d\pi(\cdot)$ ist $\mathbb{K}_\infty$ -meßbar nach Fubini.

Es gilt $\int_0^\cdot G(\cdot, \cdot, z) d\pi(\cdot) = \int_0^{\hat{G}}(\cdot, \cdot, z) d\pi(\cdot)$ außerhalb einer $\mathbb{K}_\infty$ -Nullmenge, $\hat{G}$ gemäß (2.7.1).

Nun ist nach Fubini $\int_0^{\hat{G}}(\cdot, \cdot, z) d\pi(\cdot)$ meßbar bezüglich $\mathbb{K}_s$ für alle $s > z$, wegen der Rechtsstetigkeit von $(\mathbb{K}_z)_{0 \leq z \leq +\infty}$ also meßbar bezüglich $\mathbb{K}_z$. Da $\mathbb{K}_z$ alle $\mathbb{K}_\infty$ -Nullmengen enthält, folgt die Behauptung.

§3 Das allgemeine sequentielle Testmodell nach

H. Richter

H Richter beschreibt in)11(ein sequentielles Testmodell, welches in den Arbeiten von V. Mammitzsch)7(,)8(und K. Pilzweger)10(auf allgemeinere Fälle übertragen wurde. Wir beschreiben hier ein Modell, das eine neuerliche Erweiterung bringt.

(3.0) Bezeichnungen und Voraussetzungen

(3.0.0) Mit Z^e (Menge der endlichen Testzeitpunkte) meinen wir die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der 0 oder die nichtnegative reelle Achse, $[0, +\infty)$. $Z := Z^e \cup \{+\infty\}$.

Gegeben seien

(3.0.1) ein Meßraum $(M, \mathcal{K})$ mit Wahrscheinlichkeitsmaßen (Hypothesen) p_θ , wobei θ eine beliebige Indexmenge Θ durchlaufe;

(3.0.2) eine monoton wachsende Familie $(\mathcal{K}_z)_{z \in Z}$ von Untersigmaalgebren von $\mathcal{K}$, o. B. d. A. sei $\mathcal{K}_\infty := \bigcup_{z \in Z} \mathcal{K}_z = \mathcal{K}$;

(3.0.3) ein topologischer Raum (Schadensraum) (E, τ_E) und ein Punkt $\infty \notin E$, der für einen 'unendlich großen' Schaden stehen soll

und

(3.0.4) eine Familie $(S(m, z))_{(m, z) \in M \times Z}$ von nichtleeren Mengen (Schadensbereichen), für die gilt:

a) $S(m, z) \subset E$ für alle $(m, z) \in M \times Z^e$,

b) $S(m, \infty) = \{ \vec{\infty} \}$ für alle m aus M .

Mit Hilfe dieser Größen setzen wir fest:

(3.1) Definitionen

(3.1.0) Ein Sequenztest (T, s) besteht aus einer Stopzeit T der Familie $(K_z)_{z \in Z}$ mit $p_\theta(T = \infty) = 0$ für alle θ aus Θ und einer zu T gehörigen Schadensfunktion s , d.h. einer Abbildung s von M nach $E \cup \{ \vec{\infty} \}$, welche bezüglich K_T und $B(\mathcal{T}_E \cup \{ \vec{\infty} \})$ meßbar ist und bei der für alle m aus M $s(m)$ ein Element aus $S(m, T(m))$ ist.

(3.1.1) Ein sequentielles Testproblem sTP ist ein 5-tupel

$$(\{ p_\theta : \theta \in \Theta \}, (E, \mathcal{T}_E), \{ S(m, z) : (m, z) \in M \times Z \}, K, \leq)$$

bestehend aus der Menge der Hypothesen, dem Schadensraum, den Schadensbereichen, einer Klasse K von Sequenztests und einer linearen Quasiordnung (Präferenzrelation) $\leq$ auf K .

(3.1.2) Eine Lösung des sequentiellen Testproblems sTP ist ein Sequenztest (T^*, s^*) aus K mit $(T^*, s^*) \leq (T, s)$ für alle (T, s) aus K .

Zur Motivierung und Veranschaulichung dieser Begriffe siehe
z.B. §8 dieser Arbeit oder die oben genannte Literatur.

Wir werden in den nächsten Abschnitten verschiedene Typen sequen-
tieller Testprobleme beschreiben und die Existenz von Lösungen
dazu beweisen. Wir beginnen ,wie angekündigt, mit dem Fall
beliebiger Hypothesenmengen.

§4 Sequentielle Testprobleme 1. und 2. Art

Ziel dieses Abschnittes ist die Einführung zweier Typen sequentieller Testprobleme. Die Existenz von Lösungen dazu wird dann in den folgenden Abschnitten gezeigt werden.

(4.0) Voraussetzungen und Bezeichnungen

- (4.0.0) Für diesen und die folgenden Paragraphen sei $Z = [0, \infty]$.
- (4.0.1) Es existiere ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(M, \mathbb{K})$, welches zur Menge $\{p_\theta : \theta \in \Theta\}$ der Hypothesen äquivalent ist.
- (4.0.2) $(M, \mathbb{K}, \mathbb{P})$ sei vollständig und $\mathbb{K}_0$ enthalte alle $\mathbb{P}$ -Nullmengen von $\mathbb{K}$; außerdem sei $(\mathbb{K}_z)_{z \in Z}$ rechtsstetig.
- (4.0.3) $\mathbb{K}$ sei separabel erzeugt, d. h. die Vervollständigung bzgl. $\mathbb{P}$ einer von abzählbar vielen Teilmengen von M erzeugten Sigmaalgebra $\mathbb{K}^a$.
- (4.0.4) Mit $f'(\cdot, \theta, z)$ bezeichnen wir eine Version der Radon-Nikodym'schen Dichte von $p_\theta|_{\mathbb{K}_z}$ bezüglich $\mathbb{P}|_{\mathbb{K}_z}$.
- (4.0.5) $\mathbb{E}$ bedeutet, daß der betreffende (bedingte) Erwartungswert bezüglich $\mathbb{P}$ gebildet wurde.

(4.1) Bemerkungen

(4.1.0) Sei $(M, \mathbb{K}, p)$ ein separabel erzeugtes, vollständiges W-Feld, dann ist $(L_1(M, \mathbb{K}, p) = L_1(M, \mathbb{K}^a, p|_{\mathbb{K}^a})$ separabel.

(Hinweis: Wir werden im weiteren nur Räume von $\mathbb{R}$ -wertigen Funktionen betrachten. Wird bei einem Raum des L_1 oder L_∞ keine spezielle Topologie genannt, so ist immer die Normtopologie gemeint.)

Bew. :

Sei Σ ein abzählbarer Erzeuger von $\mathbb{K}^a$. Nach Dunford-Schwartz 4(III 8.3 gilt, daß die Menge aller Σ -einfachen Funktionen dicht ist in $L_1(M, \mathbb{K}^a, p|_{\mathbb{K}^a})$. Damit ist auch die abzählbare Menge aller $\mathbb{Q}$ -wertigen Σ -einfachen Funktionen dicht.

(4.1.1) Sei $(M, \mathbb{K}, p)$ ein W-Feld, $\mathbb{K}^u$ eine Untersigmaalgebra von $\mathbb{K}$, dann gilt:

$L_1(M, \mathbb{K}^u, p|_{\mathbb{K}^u})$ ist abgeschlossener linearer Unterraum von $L_1(M, \mathbb{K}, p)$.

Bew. : Es gilt

$$\| \cdot \|_{L_1(M, \mathbb{K}, p)} \Big|_{L_1(M, \mathbb{K}^u, p|_{\mathbb{K}^u})} = \| \cdot \|_{L_1(M, \mathbb{K}^u, p|_{\mathbb{K}^u})}$$

Wegen der Vollständigkeit von $L_1(M, \mathbb{K}^u, p|_{\mathbb{K}^u})$ folgt die Behauptung.

Im folgenden werden wir einige Eigenschaften der Dichten f' angeben.

(4.2) Lemma

(4.2.0) Für alle θ aus Θ und alle z aus Z gilt: $f'(\cdot, \theta, z) \geq 0$ $\mathbb{P}$ -f.ü.

(4.2.1) Für alle θ aus Θ und alle z aus Z gilt:

$$f'(\cdot, \theta, z) = \mathbb{E}(f'(\cdot, \theta, \infty) | \mathcal{K}_Z) \quad \mathbb{P}\text{-f.ü.}$$

(4.2.2) Für alle θ aus Θ ist $(f'(\cdot, \theta, z))_{z \in Z}$ ein Martingal bzgl.

$$(\mathcal{K}_Z)_{z \in Z} \text{ und } \mathbb{P}.$$

(4.2.3) Für alle θ aus Θ ist $\{f'(\cdot, \theta, z) : z \in Z\}$ gleichmäßig integrierbar bezüglich $\mathbb{P}$.

(4.2.4) Für alle θ aus Θ existiert eine rechtsstetige Version

$$(f(\cdot, \theta, z))_{z \in Z} \text{ des Martingals } (f'(\cdot, \theta, z))_{z \in Z}.$$

(4.2.5) Für alle θ aus Θ ist die Abbildung $z \mapsto f(\cdot, \theta, z)$ von Z nach

$$L_1(M, \mathbb{K}, \mathbb{P}) \text{ rechtsstetig. (} \cdot \text{) bedeutet dabei die Restklassenbildung bezüglich } \mathbb{P} \text{.)}$$

Beweis:

(4.2.0) - (4.2.2) sind trivial.

(4.2.3) folgt nach)9(V T 19 aus (4.2.2).

(4.2.4) folgt nach)9(VI T 4.

(4.2.5): Für alle m aus M gilt $f(m, \theta, s) = \lim_{z \downarrow s} f(m, \theta, z)$ für alle θ aus Θ und alle s aus Z .

Wegen (4.2.3) und)9(II T 21 folgt die Behauptung.

(4.3) Definition

$\mathbb{D}_0$ sei die kleinste Sigmaalgebra über Θ so, daß die Abbildung $F'(\cdot, \omega) : \Theta \rightarrow (L_1(M, \mathbb{K}, \mathbb{P}), \mathcal{B}(L_1))$ gemäß $F'(\theta, \omega) := \{f(\cdot, \theta, \omega)\}$ meßbar ist.

(4.4) Lemma

$\mathbb{D}_0$ ist separabel erzeugt.

Beweis:

Nach (4.1.0) ist $L_1(M, \mathbb{K}, \mathbb{P})$ separabel, damit ist die von $F'(\cdot, \omega)$ erzeugte Sigmaalgebra separabel erzeugt.

Wir können jetzt definieren, was wir unter einer Bayes-Vorbewertung verstehen wollen.

(4.5) Definition

Ein Paar $(\mathbb{D}, \pi)$, bestehend aus einer Sigmaalgebra $\mathbb{D}$ über Θ und einem Wahrscheinlichkeitsmaß π auf $\mathbb{D}$, heißt Bayes-Vorbewertung auf Θ , wenn $\mathbb{D}$ die Sigmaalgebra $\mathbb{D}_0$ umfaßt, $(\Theta, \mathbb{D}, \pi)$ vollständig und separabel erzeugt ist, und π mit $\mathbb{P}$ verträglich ist, d.h. gilt für A aus $\mathbb{K}$ $p_\theta(A) = 0$ für alle θ ausserhalb einer π -Nullmenge, dann gilt auch $\mathbb{P}(A) = 0$.

(4.6) Bemerkung

Die letzte Bedingung in (4.5) ist für den Fall $\Theta \subset \mathbb{N}$ eine Verallgemeinerung der Bedingung $\pi(\{\theta\}) > 0$ für alle θ aus Θ , wie sie z.B. in [8] verwendet wird.

(4.7) Lemma

Sei $(\mathbb{D}, \pi)$ eine Bayes-Vorbewertung. Dann gilt:

(4.7.0) Die Abbildung $F'(\cdot, \infty): (\mathbb{D}, \pi) \rightarrow L_1(M, K, \mathbb{P})$ ist stark π -integrierbar.

(4.7.1) Es existiert eine $\mathbb{P} \otimes \pi$ -integrierbare Funktion

$F'^X(\cdot, \cdot, \infty): M \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

a) $\|F'^X(\cdot, \cdot, \infty)\| = F'(\cdot, \infty)$ für alle $\cdot$ aus $\mathbb{D}$,

b) $\int_{\mathbb{D}} F'^X(m, \cdot, \infty) d\pi(\cdot) = \int_{\mathbb{D}} F'(\cdot, \infty) d\pi(\cdot)$ $\mathbb{P}$ -f.ä.

c) Falls $f'(m, \cdot, \infty) \leq a(m, \cdot) \in \mathbb{R}$ für alle m aus M und alle $\cdot$ aus $\mathbb{D}$ gewählt werden kann, dann ist es möglich $F'^X(m, \cdot, \infty) \leq a(m, \cdot)$ zu konstruieren.

Beweis:

Aus (4.3) und (4.5) folgt die Meßbarkeit von $F'(\cdot, \infty)$.

$\|F'(\cdot, \infty)\| = \int_M f(m, \cdot, \infty) d\mathbb{P}(m) = 1$ für alle $\cdot$ aus $\mathbb{D}$, also gilt

(4.7.0) nach (2.3).

(4.7.1)a) und b) folgen mittels III.11.16 aus 4(unmittelbar aus (4.7.0)

Aus $f'(m, \cdot, \infty) \leq a(m, \cdot)$ für alle $(m, \cdot)$ folgt nach der Konstruktion in 4(III.11.16 die Behauptung (4.7.1)c).

Die Eigenschaften (4.7.0) und (4.7.1) werden wir im weiteren häufig verwenden. Eine erste Anwendung findet sich bereits in der nun folgenden Definition der sequentiellen Testprobleme der Klasse I (1. Art).

(4.8) Definition

Ein sequentielles Testproblem

$(\{p_{\cdot}: \cdot \in \mathbb{D}\}, (E, \gamma_E), \{S(m, z): (m, z) \in M \times Z\}, K, \leq)$ gehört zur

Klasse I (ist von 1. Art), wenn gilt:

(4.8.0) Es gibt eine Bayesvorbewertung $(\mathbb{D}, \pi)$ so, daß $E = L_1(\mathbb{D}, \mathbb{D}, \pi)$ gilt.

Für alle (m, z) aus $M \times [0, +\infty)$ ist

(4.8.1) $S(m, z)$ bezüglich $\mathcal{G}(L_1(\theta, \mathbb{D}, \pi), L_\infty(\theta, \mathbb{D}, \pi))$ abgeschlossen,

(4.8.2) $S(m, z) = c(z) \mathbb{1}_0 + Q(m, z)$ mit

a) $0 \leq c(z)$ monoton wachsend gegen $+\infty$ mit z gegen $+\infty$;

b) es existieren $\mathbb{P}_\pi$ -integrierbare Funktionen

$$b_i: M \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}, i=u, o, \text{ so, daß}$$

$$b_u(m, \theta) \leq u(\theta) \leq b_o(m, \theta) \quad \pi\text{-fast überall für alle } u \text{ aus}$$

$$Q(m, z) \text{ und alle } (m, z) \text{ aus } M \times [0, +\infty) \text{ gilt;}$$

c) $b_u(m, \cdot)$ und $b_o(m, \cdot)$ seien π -integrierbar für alle m aus M .

(4.8.3) Die Familie $(Q(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ von Korrespondenzen ist

progressiv innen-meßbar bezüglich $(K_z)_{0 \leq z < \infty}$.

(4.8.4) Es existiert a aus $\mathbb{R}$ so, daß für alle θ aus Θ und alle m

aus M die Dichte $f'(m, \theta, \infty) \leq a$ (und damit auch alle Dichten

$f'(m, \theta, z) \leq a$) gewählt werden kann.

(4.8.5) Sei $\mathbb{T} := \{ T \text{ Stopzeit der Familie } (K_z)_{z \in \mathbb{Z}} \text{ mit } \mathbb{P}(T = \infty) = 0$

$$\text{und } \theta \mapsto \int_M c(T(m)) F'^X(m, \theta, \infty) d\mathbb{P}(m) \text{ ist}$$

$$\pi\text{-integrierbar. } \}, \text{ dann ist}$$

$$K = \{ (T, s) : (T, s) \text{ ist Sequenztest mit } T \text{ aus } \mathbb{T} \}.$$

(4.8.6) Sei $r(T, s) := \int_\Theta \int_M s(m) \mathbb{1}_{F'^X(m, \cdot, \infty)} d\mathbb{P}(m) d\pi(\theta)$

für (T, s) aus K , dann ist $(T, s) \leq (T', s')$ äquivalent mit

$$r(T, s) \leq r(T', s').$$

$\mathbb{0} \cdot \mathbb{0}$ bedeute dabei die Äquivalenzklassenbildung bezüglich π .

(4.9) Definitionen

(4.9.0) $r(T, s)$ gemäß (4.8.6) heißt Bayes-Risiko des Sequenztests (T, s) aus K .

(4.9.1) Eine Lösung (T^*, s^*) eines Testproblems der Klasse I heißt Bayes-Lösung 1. Art.

(4.10) Bemerkungen

(4.10.0) Die Integrale in (4.8.6) sind erklärt.

(4.10.1) Es gilt $g(u', Q(m, z)) > -\infty$ für alle (m, z) aus $M \times [0, +\infty)$ und alle u' aus $L_\infty(\Theta, \mathcal{D}, \pi)$ mit $u'(\theta) \geq 0$ für π -fast alle θ .

Beweis:

(4.8.2) impliziert $s(m) = c(T(m)) \cdot 1_{\{0\}} + q(m)$, wo $q(m)$ aus $Q(m, T(m))$ für alle m aus M mit $T(m) < +\infty$.

Aus (4.8.2)b) folgt mittels (2.3), daß q stark $\mathbb{P}$ -integrierbar ist und somit auch $q \cdot F^X(\cdot, \cdot, \infty)$ nach (4.7.1) und (4.8.4).

Da T aus $\mathcal{T}$ ist, existiert auch $\int_{\Theta} \int_M c(T(m)) \cdot F^X(m, \cdot, \infty) d\mathbb{P}(m) d\pi(\theta)$

und somit auch $r(T, s)$.

Für alle u aus $Q(m, z)$, alle (m, z) aus $M \times [0, +\infty)$ und alle u' aus

$L_\infty(\Theta, \mathcal{D}, \pi)$ mit $u'(\theta) \geq 0$ π -fast überall gilt:

$$\int_{\Theta} u'(\theta) u(\theta) d\pi(\theta) \geq \int_{\Theta} u'(\theta) b_u(m, \theta) d\pi(\theta) > -\infty$$

(4.11) Definition

Ein sequentielles Testproblem

$(\{p_\theta : \theta \in \Theta\}, (E, \tau_E), \{S(m, z) : (m, z) \in M \times Z\}, K, \leq)$ gehört zur Klasse II, wenn gilt:

(4.11.0) Es gibt eine Bayes-Vorbewertung (D, π) so, daß

$$E = L_\infty(\theta, D, \pi) \text{ und } \tau_E = \mathfrak{C}(L_\infty(\theta, D, \pi), L_1(\theta, D, \pi)) \text{ gilt.}$$

(4.11.1) $S(m, z)$ ist für alle (m, z) aus $M \times [0, +\infty)$ konvex und abgeschlossen und es gilt

(4.11.2) $S(m, z) = c(z) \cap 1_0 + Q(m, z)$. Dabei sei

a) $0 \leq c(z)$ monoton wachsend gegen $+\infty$ mit z gegen $+\infty$;

b) es existiert b aus $\mathbb{R}$ mit $\|u\|_\infty \leq b$ für alle u aus

$Q(m, z)$ und alle (m, z) aus $M \times [0, +\infty)$.

(4.11.3) Sei $K' := \{u' \in L_1(\theta, D, \pi) : u'(\theta) \geq 0 \text{ } \pi\text{-fast überall}\}$, dann

ist die Familie $(Q(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ progressiv K' -meßbar

bezüglich $(K_z)_{0 \leq z < \infty}$.

(4.11.4) Für jedes m aus M existiert eine π -integrierbare Funktion

$a(m, \cdot) : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ so, daß $f'(m, \theta, z) \leq a(m, \theta)$ für alle (m, θ, z)

aus $M \times \Theta \times [0, +\infty)$ gewählt werden kann.

(4.11.5) $K = \{(T, s) : (T, s) \text{ Sequenztest mit } T \text{ aus } \mathbb{T}\}$

(4.11.6) Sei $sr(T, s) := \int_\Theta (L_1, L_\infty) - \int_M s(m) \cap F^{T, X}(m, \cdot, \infty) \cap dP(m) d\pi(\theta)$

für (T, s) aus K , dann ist $(T, s) \leq (T', s')$ gleichbedeutend

mit $sr(T, s) \leq sr(T', s')$.

(4.12) Definitionen

(4.12.0) $sr(T, s)$ gemäß (4.11.6) heißt schwaches Bayesrisiko des Sequenztests (T, s) .

(4.12.1) Eine Lösung eines Testproblems der Klasse II heißt Bayes-lösung 2. Art.

(4.13) Bemerkungen

(4.13.0) Die Integrale in (4.11.6) sind erklärt.

(4.13.1) Es gilt $g(u', Q(m, z)) > -\infty$ für alle u' aus $L_1(\Theta, \mathcal{B}, \pi)$ und alle (m, z) aus $M \times [0, +\infty)$.

Beweis:

s ist als Abbildung von $(M, \mathcal{K}_\infty)$ nach L_∞ , versehen mit ${}^B\mathcal{G}(L_\infty, L_1)$ meßbar. Damit ist s auch als Abbildung nach $(L_1, {}^B\mathcal{G}(L_1, L_\infty))$ meßbar. Die Abbildung $m \mapsto \langle F^x(m, \cdot, \infty) \rangle$ ist meßbar bezüglich $\mathcal{B}(L_1)$. Mit $s(m)$ aus L_∞ folgt, daß die Abbildung $s(\cdot) \langle F^x(\cdot, \cdot, \infty) \rangle : (M, \mathcal{K}_\infty) \rightarrow (L_1, {}^B\mathcal{G}(L_1, L_\infty))$ meßbar ist.

Damit ist dann auch die Abbildung

$\|s(\cdot) \langle F^x(\cdot, \cdot, \infty) \rangle\|_{L_1} : (M, \mathcal{K}_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ meßbar.

Ferner gilt

$$\begin{aligned} & \int_M \int_\Theta |s(m) \langle F^x(m, \cdot, \infty) \rangle| d\pi(\theta) d\mathbb{P}(m) \\ & \leq b \int_M \int_\Theta F^x(m, \theta, \infty) d\pi(\theta) d\mathbb{P}(m) \\ & \quad + \int_\Theta c(T(m)) F^x(m, \theta, \infty) d\pi(\theta) d\mathbb{P}(m) < +\infty. \end{aligned}$$

Damit ist nach (2.4) $s(\cdot) \in F^1 X(\cdot, \cdot, \cdot, \infty) \in (L_1, L_\infty) - \pi$ - integrierbar, und das (L_1, L_∞) -Integral liegt wieder in L_1 .

Noch eine Bemerkung zum Schluß: Den Punkt $\vec{0}$ aus (3.1.0) wählen wir in diesen beiden Fällen, wie ja auch schon (4.8.2) und (4.11.2) vermuten lassen, speziell als die Funktion $0 + \infty 1_0$.

§ 5 Die Existenz von Bayes-Lösungen 1. Art

Gegeben sei ein sequentielles Testproblem der Klasse I.

Die Konstruktion einer Bayes-Lösung 1. Art gliedert sich in zwei Teilschnitte: Zunächst konstruieren wir zu einer vorgegebenen Stopzeit

T_0 eine 'optimale' Schadensfunktion s_0 , d.h. eine Schadensfunktion s_0 , für die $r(T_0, s_0) \leq r(T_0, s)$ gilt, falls (T_0, s) aus K .

Im zweiten Schritt werden wir dann unter diesen 'teiloptimalen' Tests eine Bayes-Lösung 1. Art suchen. Dies geschieht durch 'optimales' Stoppen eines bestimmten stochastischen Prozesses.

Als erstes werden wir uns nun von dem bei der Definition des Bayes-Risikos auftauchenden starken Integral befreien. Dazu dienen die folgenden Lemmata.

(5.0) Lemma

Sei (T, s) aus K , dann existiert eine $\mathbb{P}|_{\mathbb{K}_T}$ -integrierbare Funktion

$q^x : M \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ so, daß gilt:

$s(m) = c(T(m)) 0 1_\Theta + 0 q^x(m, \cdot)$ außerhalb einer $\mathbb{K}_\infty$ -Nullmenge.

Beweis:

Wegen (4.8.2) gilt auf $\{m \in M : T(m) < \infty\}$ $s(m) = c(T(m)) 0 1_\Theta + q(m)$

mit $q(m)$ aus $Q(m, T(m))$; setze $q(m) := 0 0 1_\Theta$ auf $\{m \in M : T(m) = \infty\}$.

Wegen (4.5.2) ist q dann stark $\mathbb{P}^{\pi}_{\mathbb{K}_T}$ -integrierbar. Nach Lemma III.11.16 in [4] existiert eine $\mathbb{P}^{\pi}_{\mathbb{K}_T}$ -integrierbare Funktion q^x mit $0q^x(m, \cdot) = q(m)$ für alle m außerhalb einer $\mathbb{K}_T$ -Nullmenge.

(5.1) Definition

Sei zu $(\mathbb{K}_z)_0 \leq z \leq +\infty$ und $\mathbb{D}$ die Familie $(\mathbb{H}_z)_0 \leq z \leq +\infty$ gemäß

(2.5) konstruiert.

Für z aus $[0, +\infty)$ sei dann $F^x(\cdot, \cdot, z) := E(F^x(\cdot, \cdot, \infty) | \mathbb{H}_z)$.

(5.2) Lemma

(5.2.0) $(F^x(\cdot, \cdot, z))_{z \in \mathbb{Z}}$ ist ein Martingal bezüglich $(\mathbb{H}_z)_{z \in \mathbb{Z}}$ und $\mathbb{P}^{\pi}$.

(5.2.1) Es existiert eine rechtsstetige Version $(F^x(\cdot, \cdot, z))_{z \in \mathbb{Z}}$ dieses Martingals.

(5.2.2) $(F^x(\cdot, \cdot, z))_{z \in \mathbb{Z}}$ kann so gewählt werden, daß

- a) $F^x(m, \theta, z) \leq a$ für alle (m, θ, z) aus $M \times \Theta \times \mathbb{Z}$ gilt;
- b) $F^x(m, \cdot, z) : (\Theta, \mathbb{D}, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist für alle m und z .

Beweis:

(5.2.0) folgt unmittelbar aus der Konstruktion (5.1).

(5.2.1) folgt wegen (5.2.0), (5.1), (2.6) und VI T 4 aus [9].

$F^x(\cdot, \cdot, \infty)$ war o.B.d.A. so gewählt, daß (5.2.2) a) und b) richtig waren. Damit kann für jedes z aus $[0, +\infty)$ $F^x(\cdot, \cdot, z)$ so gewählt werden, daß $F^x(m, \theta, z) \leq a$ für alle (m, θ) gilt. Wie die Konstruktion in [9] zeigt, kann $F^x(\cdot, \cdot, z)$ dann so konstruiert werden, daß (5.2.2) a) gilt. (5.2.2)b) folgt dann aus (2.8).

(5.3) Lemma

Sei (T, s) aus K , dann gilt:

$$\begin{aligned} r(T, s) &= \int_0^1 \int_M (c(T(m)) + q^X(m, \theta)) F^X(m, \theta, T(m)) dP(m) d\pi(\theta) \\ &= \int_M \int_0^1 (c(T(m)) + q^X(m, \theta)) F^X(m, \theta, T(m)) d\pi(\theta) dP(m) \quad . \end{aligned}$$

Beweis:

Nach (5.0) und (5.2) gilt

$s(m) \langle F^X(m, \cdot, \infty) \rangle = \langle (c(T(m)) + q^X(m, \cdot)) F^X(m, \cdot, \infty) \rangle$ außerhalb einer K_∞ -Nullmenge. Somit ist

$$\begin{aligned} r(T, s) &= \int_0^1 \int_M s(m) \langle F^X(m, \cdot, \infty) \rangle dP(m) d\pi(\theta) \\ &= \int_0^1 \int_M \langle (c(T(m)) + q^X(m, \cdot)) F^X(m, \cdot, \infty) \rangle dP(m) d\pi(\theta) \\ &= \int_0^1 \int_M (c(T(m)) + q^X(m, \theta)) F^X(m, \theta, \infty) dP(m) d\pi(\theta) \\ &= \int_0^1 \int_M (c(T(m)) + q^X(m, \theta)) F^X(m, \theta, T(m)) dP(m) d\pi(\theta) \end{aligned}$$

weil $c(T(\cdot)) \geq 0$ und $K_T \otimes \mathbb{D}$ meßbar ist, q^X integrierbar bezüglich $\left. \mathbb{P} \right|_{K_T}$ und damit auch bezüglich $\left. \mathbb{P} \otimes \pi \right|_{\mathbb{H}_T}$ ist, woraus zusammen mit

VI T 13 aus 9(die letzte Gleichung folgt.

Die zweite Gleichung des Lemmas ergibt sich unmittelbar aus der Meßbarkeit des Integranden bezüglich der vervollständigten Produktsigmaalgebra $\mathbb{H}_\infty$.

Wir wollen zur Konstruktion der zu T_0 gehörigen optimalen Schadensfunktion s_0 das Korollar (1.10) anwenden. Um dies tun zu können benötigen wir noch das folgende Lemma.

(5.4) Lemma

Für alle (u) aus $L_1(\mathcal{G}, \mathbb{D}, \pi)$ ist der stochastische Prozeß

$$\left(\int_0^\cdot u(\theta) F^x(\cdot, \theta, z) d\pi(\theta) \right)_{0 \leq z < \infty} \text{ progressiv meßbar,}$$

d. h. der stochastische Prozeß $(F^x(\cdot, \cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ auf M

mit Werten in $L_\infty(\mathcal{G}, \mathbb{D}, \pi)$ ist progressiv meßbar bezüglich $B_{\mathcal{G}}(L_\infty, L_1)$.

Beweis:

Sei (u) aus L_1 gegeben.

Damit erfüllt $(u(\cdot) F^x(\cdot, \cdot, z))_{z \in \mathbb{Z}}$ die Voraussetzungen des Lemmas

(2.9), also ist $(\int_0^\cdot u(\theta) F^x(m, \theta, z) d\pi(\theta))_{z \in \mathbb{Z}}$ an $(K_z)_{z \in \mathbb{Z}}$ adaptiert.

Ausserdem folgt nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue aus der

Rechtsstetigkeit von $(F^x(\cdot, \cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ die Rechtsstetigkeit von

$(\int_0^\cdot u(\theta) F^x(\cdot, \cdot, z) d\pi(\theta))_{0 \leq z < \infty}$ und damit die Behauptung.

Wir kommen jetzt zu dem angekündigten Satz über die Existenz

'optimaler' Schadensfunktionen zu vorgegebener Stopzeit T_0 aus $\mathbb{T}$.

(5.5) Satz

Sei $(\{p_\theta : \theta \in \Theta\}, (E, \mathcal{F}_E), \{S(m, z) : (m, z) \in M \times Z\}, K, \leq)$ ein sequentielles Testproblem 1. Art. Dann existiert zu jeder Stopzeit T_0 aus $\mathbb{T}$ eine Schadensfunktion s_0 derart, daß $(T_0, s_0) \leq (T_0, s)$ für alle (T_0, s) aus K gilt.

Beweis:

1. Beh.: $Q(m, z)$ ist $\mathcal{G}(L_1, L_\infty)$ -kompakt für alle (m, z) aus $M \times [0, +\infty)$.

Bew.: Wegen (4.8.2) gilt für alle u aus $Q(m, z)$:

$$|u(\theta)| \leq \max(|b_u(m, \theta)|, |b_0(m, \theta)|) \quad . \quad \text{Daraus folgt, daß } Q(m, z) \text{ gleichgradig integrierbar und damit nach)9(II T 21}$$

$\mathcal{G}(L_1, L_\infty)$ -kompakt ist.

2. Sei $T_0^e : M \rightarrow [0, +\infty)$ definiert gemäß

$$T_0^e(m) := \begin{cases} T_0(m) & \text{falls } T_0(m) < \infty, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt, da T_0^e und T_0 nur auf einer K_∞ -Nullmenge differieren und K_{T_0} alle K_∞ -Nullmengen enthält, $K_{T_0} = K_{T_0^e}$.

3. Wegen (4.8.1), (4.8.2), (4.8.3) und Teil eins dieses Beweises

erfüllt $(Q(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ die Voraussetzungen von (1.10).

Wegen (5.4) erfüllt auch $(u'(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ mit $u'(m, z) := (F^x(m, \cdot, z))_0$ die Voraussetzungen von (1.10).

Es existiert also (s. Teil 2) $q_o : (M, K_{T_o}) \rightarrow (L_1(\theta, \mathbb{D}, \pi), \mathbb{B}(L_1))$

meßbar so, daß $q_o(m)$ aus $Q(m, T_o^e(m))$ und

$$\int_{\theta} q_o(m) \cap F^x(m, \cdot, T_o^e(m)) \cap d\pi(\theta) \leq \int_{\theta} u \cap F^x(m, \cdot, T_o^e(m)) \cap d\pi(\theta) \quad \text{für}$$

alle u aus $Q(m, T_o^e(m))$ und alle m aus M gilt.

4. Es sei $s_o : M \rightarrow L_1(\theta, \mathbb{D}, \pi) \vee \{\infty\}$ definiert gemäß

$$s_o(m) := \begin{cases} c(T_o(m)) \cap 1_{\theta} + q_o(m) & \text{für } T_o(m) < \infty, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beh.: s_o ist die gesuchte optimale Schadensfunktion.

Bew.: a) Nach Konstruktion ist s_o eine Schadensfunktion zu T_o .

b) Sei (T_o, s) aus K , $s = c(T_o(\cdot)) \cap 1_{\theta} + q(\cdot)$, wobei $q(m)$ aus

$Q(m, T_o^e(m))$ für alle m mit $T_o(m) < \infty$ ist. Nach (5.3) gilt:

$$\begin{aligned} r(T_o, s_o) &= \int_M \int_{\theta} (c(T_o(m)) + q_o^x(m, \theta)) F^x(m, \theta, T_o(m)) d\pi(\theta) dP(m) \\ &= \int_{\{T_o < \infty\}} \int_{\theta} q_o^x(m, \theta) F^x(m, \theta, T_o(m)) d\pi(\theta) dP(m) \\ &\quad + \int_{\{T_o < \infty\}} \int_{\theta} c(T_o(m)) F^x(m, \theta, T_o(m)) d\pi(\theta) dP(m) \\ &= \int_{\{T_o < \infty\}} \int_{\theta} q_o(m) \cap F^x(m, \theta, T_o(m)) \cap d\pi(\theta) dP(m) \quad (\text{n. (5.0)}) \\ &\quad + \int_{\{T_o < \infty\}} \int_{\theta} c(T_o(m)) F^x(m, \theta, T_o(m)) d\pi(\theta) dP(m) \\ &\leq \int_{\{T_o < \infty\}} \int_{\theta} q(m) \cap F^x(m, \theta, T_o(m)) \cap d\pi(\theta) dP(m) \\ &\quad + \int_{\{T_o < \infty\}} \int_{\theta} c(T_o(m)) F^x(m, \theta, T_o(m)) d\pi(\theta) dP(m) \\ &= r(T_o, s). \end{aligned}$$

(5.6) Bemerkungen

(5.6.0) Sei (T, s^*) aus K mit $r(T, s^*) \leq r(T, s)$ für alle (T, s) aus K ,
(Existenz siehe (5.5)), dann kann wegen (5.5) o. B. d. A. angenommen werden, daß $r(T, s^*) = \mathbb{E}(G(\cdot, T(\cdot)))$ gilt, wobei
$$G(m, z) := \int_0 c(z) F^X(m, \theta, z) d\pi(\theta) + g(0 F^X(m, \cdot, z), Q(m, z))$$
ist.

(5.6.1) Das Auffinden einer Bayes-Lösung 1. Art reduziert sich damit auf das Problem eine Stopzeit T^* aus $\mathbb{T}$ so zu konstruieren, daß der (wegen (5.4) und (1.8.0)) progressiv meßbare Prozeß
 $(-G(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ optimal gestoppt wird, d. h.
 $\mathbb{E}(-G(\cdot, T^*(\cdot))) \geq \mathbb{E}(-G(\cdot, T(\cdot)))$ für alle T aus $\mathbb{T}$ gilt.

(5.6.2) Es gilt $\lim_{z \rightarrow \infty} -G(m, z) = -\infty$ für $\mathbb{P}$ -fast alle m aus M .

Bew.:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} -G(m, z) \leq b(m) + \lim_{z \rightarrow \infty} -c(z) \int_0 F^X(m, \theta, z) d\pi(\theta) \text{ für } \mathbb{P}\text{-fast}$$

alle m aus M .

Wegen 9(VI T 6 gilt dann

$$\lim_{z \rightarrow \infty} -G(m, z) \leq b(m) + \int_0 F^X(m, \theta, \infty) d\pi(\theta) \lim_{z \rightarrow \infty} -c(z) \quad \mathbb{P}\text{-f. u. .}$$

$$A := \{ m \in M : \int_0 F^X(m, \theta, \infty) d\pi(\theta) = 0 \}.$$

$$\text{Dann gilt } \int_A \int_0 F^X(m, \theta, \infty) d\pi(\theta) d\mathbb{P}(m) = \int_0 p_\theta(A) d\pi(\theta) = 0 \text{ und}$$

somit wegen (4.6) $\mathbb{P}(A) = 0$. Es ist also

$$\lim_{z \rightarrow \infty} -G(m, z) = -\infty \text{ für } \mathbb{P}\text{-fast alle } m \text{ aus } M.$$

Wir setzen deshalb $-G(m, \infty) := -\infty$ für alle m aus M .

Um die Ergebnisse aus der Theorie der optimalen Stopzeiten, die wir im Anhang zusammengestellt haben, verwenden zu können, benötigen wir einige Zusatzvoraussetzungen.

(5.7) Zusatzvoraussetzungen

(5.7.0) Der Prozeß $(-G(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ sei rechtsstetig.

(5.7.1) Der 'erweiterte' Prozeß $(-G(\cdot, z))_{0 \leq z \leq \infty}$ sei im $\mathbb{P}$ -Mittel quasioberhalbstetig von links, d. h. es gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(-G(\cdot, T_n(\cdot))) \leq \mathbb{E}(-G(\cdot, T(\cdot))) \quad \text{für jede Stopzeit}$$

T und jede monoton von unten gegen T konvergierende Folge

$(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Stopzeiten, für die der Erwartungswert eigentlich oder uneigentlich existiert.

Wie man sehen wird (Beweisteil 1.) von Satz (5.8)) gilt in unserem Fall, daß die Erwartungswerte immer (eigentlich oder uneigentlich) existieren.

In §8 werden wir Beispiele angeben, für die diese Zusatzvoraussetzungen erfüllt sind.

Wir kommen jetzt zum abschließenden Satz dieses Paragraphen.

(5.8) Satz:

Unter der Zusatzvoraussetzung (5.7) existiert eine Bayes-Lösung

1. Art (T^*, s^*) in K .

Beweis:

1.) Es gilt:

$$\begin{aligned} -G(m, z) &= -c(z) \int_0^{\infty} F^x(m, \theta, z) d\pi(\theta) - g(0 F^x(m, \cdot, z) | Q(m, z)) \\ &\leq |g(0 F^x(m, \cdot, z) | Q(m, z))| \leq ab(m) \quad , \text{ wobei} \\ b(m) &:= \max(|b_u(m)|, |b_o(m)|) \end{aligned}$$

2.) $-G(\cdot, z)$ ist $\mathbb{P}$ -integrierbar für alle z aus $[0, +\infty)$.

Aus 1.) und 2.) folgt zusammen mit (5.7), daß $(-G(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$

die Voraussetzungen des Stopzeittheorems aus dem Anhang erfüllt.

Es existiert also für diesen Prozeß eine $\mathbb{P}$ -f.ü. endliche Stopzeit

T^* , die optimal ist.

3.) Es bleibt noch zu zeigen T^* aus $\mathbb{T}$.

Aus der Optimalität von T^* folgt

$$\begin{aligned} \infty > \mathbb{E}(G(\cdot, T^*(\cdot))) &= \mathbb{E}(c(T^*(\cdot)) \int_0^{\infty} F^x(\cdot, \theta, T^*(\cdot)) d\pi(\theta)) \\ &\quad + \underbrace{\mathbb{E}(g(0 F^x(\cdot, \cdot, T^*(\cdot)) | Q(\cdot, T^*(\cdot))))}_{> -\infty} \end{aligned}$$

Somit gilt $0 \leq \mathbb{E}(c(T^*(\cdot)) \int_0^{\infty} F^x(\cdot, \theta, T^*(\cdot)) d\pi(\theta))$

$$= \int_0^{\infty} \int_M c(T^*(m)) F^x(m, \theta, \infty) d\mathbb{P}(m) d\pi(\theta) < \infty \quad ,$$

d.h. T^* ist aus $\mathbb{T}$.

§6 Die Existenz von Bayes-Lösungen 2. Art

Vorgelegt sei ein sequentielles Testproblem der Klasse II. Die Konstruktion einer Bayes-Lösung 2. Art verläuft nach denselben Prinzipien wie die Konstruktion einer Bayes-Lösung 1. Art. Wir werden also zunächst $sr(T, s)$ mithilfe gewöhnlicher Integrale darstellen.

(6.0) Lemma

Sei (T, s) aus K , dann existiert eine $\mathbb{P}|_{\mathbb{K}_T}$ -integrierbare Funktion

$q^x : M \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ so, daß außerhalb einer $\mathbb{K}_\infty$ -Nullmenge gilt:

$$s(m) = c(T(m)) \cdot 1_\Theta + q^x(m, \cdot) \quad .$$

Beweis:

Wegen (4.11.2) gilt auf $\{m : T(m) < \infty\}$ $s(m) = c(T(m)) \cdot 1_\Theta + q(m)$ mit $q(m)$ aus $Q(m, T(m))$; setze $q(m) := 0 \cdot 1_\Theta$ auf $\{m : T(m) = \infty\}$.

Wegen (4.11.2b) ist q dann aufgefaßt als Funktion nach $L_1(\Theta, \mathcal{D}, \pi)$ stark $\mathbb{P}|_{\mathbb{K}_T}$ -integrierbar (s. auch (2.1.0) und (2.4)). Damit folgt die Behauptung aus III. 11.16 in 4).

Wir sind damit soweit, die angestrebte Aussage über $sr(T, s)$ machen zu können.

(6.1) Lemma

Mit $(F^X(\cdot, \cdot, \cdot, z))_{z \in Z}$ gemäß (5.2.1) gilt für alle (T, s) aus K :

$$\begin{aligned} sr(T, s) &= \int_0 \int_M (c(T(m)) + q^X(m, \theta)) F^X(m, \theta, T(m)) dP(m) d\pi(\theta) \\ &= \int_M \int_0 (c(T(m)) + q^X(m, \theta)) F^X(m, \theta, T(m)) d\pi(\theta) dP(m) . \end{aligned}$$

Beweis:

Nach (6.0) und (5.2.1) gilt außerhalb einer K_∞ -Nullmenge

$$s(m) \emptyset F^{X'}(m, \cdot, \cdot, \infty) \emptyset = \emptyset (c(T(m)) + q^X(m, \cdot)) F^X(m, \cdot, \cdot, \infty) \emptyset .$$

Somit ist

$$\begin{aligned} sr(T, s) &= \int_0 (L_1, L_\infty) - \int_M s(m) \emptyset F^{X'}(m, \cdot, \cdot, \infty) \emptyset dP(m) d\pi(\theta) \\ &= \int_0 (L_1, L_\infty) - \int_M \emptyset (c(T(m)) + q^X(m, \cdot)) F^X(m, \cdot, \cdot, \infty) \emptyset dP(m) d\pi(\theta) \\ &= \int_0 \int_M (c(T(m)) + q^X(m, \theta)) F^X(m, \theta, \infty) dP(m) d\pi(\theta) . \end{aligned}$$

Der Rest des Beweises verläuft analog zum Beweis von (5.3) .

Bevor wir nun wieder zu einer festen Stopzeit T_0 aus $\mathbb{T}$ eine optimale Schadensfunktion s_0 bestimmen, noch eine Bemerkung.

(6.2) Bemerkung

Das rechtsstetige Martingal $(F^X(\cdot, \cdot, \cdot, z))_{z \in Z}$ aus (5.2.1) kann wegen (4.11) so gewählt werden, daß $F^X(m, \theta, z) \leq a(m, \theta)$ für alle (m, θ, z) aus $M \times \Theta \times Z$ gilt und daß $(\emptyset F^X(\cdot, \cdot, \cdot, z) \emptyset)_{z \in Z}$ ein rechtsstetiger, an $(\mathbb{K}_z)_{z \in Z}$ adaptierter, stochastischer Prozeß mit Werten in $(L_1(\emptyset, \mathbb{D}, \pi))$ ist.

Beweis:

Wegen (4.11.4) kann o.B.d.A. $F^X(\cdot, \cdot, \cdot, \infty)$ so gewählt werden, daß $F^X(m, \theta, \infty) \leq a(m, \theta)$ für alle (m, θ) gilt.

Mit denselben Argumenten wie in (5.2.2) a) läßt sich dann die erste Aussage dieser Bemerkung beweisen. Ausserdem weiß man dann, daß für $(F^X(\cdot, \cdot, \cdot, z))_{z \in \mathbb{Z}}$ (5.2.2)b) richtig bleibt. Der Rest der Bemerkung ergibt sich dann analog zum Beweis von (5.4), unter Beachtung von (2.1).

(6.3) Lemma

Zu $(Q(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ existiert eine progressiv (L_∞, L_1) -meßbare Familie $(q_0(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ von $(y'(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ -optimalen Auswahl-funktionen, $y'(\cdot, z)$ gemäß $y'(m, z) := (F^X(m, \cdot, z))$ für alle (m, z) aus $M \times [0, +\infty)$.

Beweis:

Das duale Paar $((L_\infty, \mathfrak{F}(L_\infty, L_1)), (L_1, \mathfrak{F}_1))$ und $(y'(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ erfüllen die in (1.12) gemachten Voraussetzungen. Gleiches gilt für den in (4.11) definierten Kegel K' . In diesem Falle ist $\text{span} K'$ gleich ganz L_1 .

$(Q(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ erfüllt wegen (4.11.1) und (4.11.3), sowie (4.13.1) die (1.11) und c) entsprechenden Voraussetzungen aus (1.12).

Sei nun u' aus L_1 mit $\|u'\| < 1$. Dann gilt

$g(u', Q(m, z)) \geq -\sup\{|u'u| : u \in Q(m, z)\} \geq -\|u'\| \cdot b \geq -b$, also ist

die konkave Funktion $g(\cdot, Q(m, z))$ für alle (m, z) aus $M \times [0, +\infty)$ nach

1) (Chap. II, §5, prop. 2 stetig auf ganz L_1 .

Damit sind alle Voraussetzungen von (1.12) erfüllt, und somit folgt unsere Behauptung aus diesem Korollar.

(6.4) Satz

Zu T_0 aus $\mathcal{T}$ wird durch die Setzung

$$s_0(m) := \begin{cases} c(T(m)) \cdot 1_0 + q_0(m, T_0(m)), & \text{falls } T_0(m) < \infty, \\ \infty & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine optimale Schadensfunktion definiert.

Beweis:

Nach Konstruktion ist $s_0 : (M, \mathcal{K}_{T_0}) \rightarrow (L_\infty \cup \{\infty\}, B(G(L_\infty, L_1) \cup \{\infty\}))$

meßbar und es gilt $s_0(m)$ ist aus $S(m, T_0(m))$ für alle m aus M .

Sei (T_0, s) aus K .

$$\begin{aligned} sr(T_0, s) &= \int_M \int_0 (c(T_0(m)) + q^x(m, \theta)) F^x(m, \theta, T_0(m)) d\pi(\theta) dIP(m) \quad \text{nach (6.1)} \\ &\geq \int_M \int_0 (c(T_0(m)) + q^x(m, \theta)) F^x(m, \theta, T_0(m)) d\pi(\theta) dIP(m) \quad \text{nach (6.3)} \\ &= sr(T_0, s_0) \end{aligned}$$

Analog wie in §5 reduziert sich damit die Konstruktion einer Bayes-Lösung 2. Art auf die Bestimmung einer optimalen Stopzeit T^* für

den Prozeß $(-G(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ gemäß $G(m, z) := \int_0^z c(z) F^x(m, \theta, z) d\pi(\theta) + g(0 F^x(m, \cdot, z), Q(m, z))$.

Wie in (5.6.2) zeigt man $\lim_{z \rightarrow \infty} -G(m, z) = -\infty$ für IP -fast alle m aus M und setzt $-G(m, \infty) := -\infty$.

Wie in §5 benötigen wir auch hier die folgende Zusatzvoraussetzung.

(6.5) Zusatzvoraussetzungen

(6.5.0) Der Prozeß $(-G(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ sei rechtsstetig und

(6.5.1) der erweiterte Prozeß $(-G(\cdot, z))_{0 \leq z \leq \infty}$ sei im IP-Mittel quasiüberhalbstetig von links.

Damit kommen wir zum abschließenden Satz dieses Paragraphen.

(6.6) Satz

Unter der Zusatzvoraussetzung (6.5) existiert eine Bayes-Lösung 2. Art (T^*, s^*) in K .

Beweis:

$$\begin{aligned} 1.) \text{ Es gilt } -G(m, z) &\leq -c(z) \int_0^{\infty} F^X(m, \theta, z) d\pi(\theta) + |g(0, F^X(m, \cdot, z), Q(m, z))| \\ &\leq \int_0^{\infty} \|v(m, z)\| F^X(m, \theta, z) d\pi(\theta) \\ &\leq b \int_0^{\infty} F^X(m, \theta, z) d\pi(\theta). \end{aligned}$$

2.) $-G(\cdot, z)$ ist IP-integrierbar für alle z aus $[0, +\infty)$.

Aus 1.) , 2.) und (6.5) folgt, daß $(-G(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ die Voraussetzungen des Stopzeittheorems aus dem Anhang erfüllt, und damit existiert eine IP-fast überall endliche optimale Stopzeit dieses Prozesses. Der Rest des Beweises verläuft völlig analog zum Beweis von (5.8).

§7 Bayes-Lösungen für Sequenztests mit höchstens abzählbar vielen Hypothesen

In den vorangegangenen Paragraphen haben wir Bayes-Lösungen ohne Einschränkungen an die Mächtigkeit der Hypothesenmenge konstruiert. Läßt man nun nur abzählbar viele Hypothesen zu, so ergeben sich einige wesentliche Vereinfachungen.

(7.0) allgemeine Voraussetzungen und Bezeichnungen

(7.0.0) l_{∞} bezeichne den Raum aller beschränkten Folgen reeller Zahlen.

(7.0.1) $l_1 \subset l_{\infty}$ sei der Raum der absolutsummierbaren Folgen.

Wenn im weiteren nicht besonders eingeführt, benutzen wir die Bezeichnungen aus den Paragraphen drei bis sechs. Allerdings benötigen wir hier nur die unten aufgeführten Voraussetzungen.

Ohne uns um irgendwelche Meßbarkeitsprobleme kümmern zu müssen, können wir sofort definieren.

(7.1) Definitionen

(7.1.0) Ein zum Zählmaß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ äquivalentes W-Maß π heißt Bayesvorbewertung.

(7.1.1) Sei $H = \{p_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine Menge von W-Maßen auf $(M, \mathcal{K})$, π eine Bayesvorbewertung, dann heißt $IP := \sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i p_i$ das zu H bezüglich π äquivalente W-Maß.

(7.2) Voraussetzung

$(K_z)_{z \in Z}$ sei rechtstetig, (M, K, IP) sei vollständig und K_0 enthalte alle IP -Nullmengen von K .

(7.3) Bemerkungen

(7.3.0) Für alle i aus $\mathbb{N}$ und alle z aus Z kann $f'(\cdot, i, z)$ so gewählt

werden, daß $0 \leq f'(m, i, z) \leq \frac{1}{\pi_i}$ für alle m aus M und

(7.3.1) $\sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i f'(m, i, z) = 1$ für alle m aus M gilt.

(7.3.2) Es existiert eine rechtstetige Version $(f(\cdot, i, z))_{z \in Z}$ des Dichtemartingals für alle i aus $\mathbb{N}$.

Beweis:

(7.3.0) folgt unmittelbar aus (7.3.1).

Wir betrachten:

$$\begin{aligned} \int_A \sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i f'(m, i, z) dIP(m) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i \int_A f'(m, i, z) dIP(m) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i p_i(A) = IP(A) \text{ für alle } A \text{ aus } K_1. \text{ Damit ist (7.3.1) bewiesen.} \end{aligned}$$

(7.3.2) folgt wieder unmittelbar aus 9(VI T 4).

(7.4) Definition

Ein sequentielles Testproblem

$(\{p_\theta : \theta \in \Theta\}, (E, \mathcal{F}_E), \{S(m, z) : (m, z) \in M \times Z\}, K, \leq)$ gehört zur

Klasse III, wenn gilt:

(7.4.0) Es ist Θ gleich $\mathbb{N}$.

(7.4.1) $E = 1_{\infty}$, $\vec{1}_E = \zeta(1_{\infty}, 1_1)$, $\vec{\omega} = (+\infty)_{i \in \mathbb{N}}$.

(7.4.2) Für eine gegebene Bayesvorbewertung π sei $\mathbb{P}$ das zur Messung der Hypothesen bezüglich π äquivalente Maß.

(7.4.3) $S(m, z) = c(z)1_{\mathbb{N}} + Q(m, z)$ für alle (m, z) aus $M \times [0, +\infty)$.

Dabei gelte:

a) $(g(p, Q(\cdot, z)))_{0 \leq z < \infty}$ ist bei festem p aus 1_1 , mit $p_i \geq 0$ für alle i aus $\mathbb{N}$, progressiv meßbar.

b) $g(\frac{1}{i}, Q(m, z)) \leq b(m)$ für alle i aus $\mathbb{N}$ und alle (m, z) aus $M \times [0, +\infty)$ mit einer $\mathbb{P}$ -integrablen Funktion $b: M \rightarrow \mathbb{R}$.

c) $0 \leq c(z)$ für alle z aus $[0, +\infty)$, und $c(z)$ wachse monoton gegen $+\infty$ mit z gegen $+\infty$.

d) $Q(m, z)$ ist konvex und abgeschlossen für alle (m, z) aus $M \times [0, +\infty)$.

(7.4.4) $K = \{ (T, s) : E(c(T(\cdot))) < \infty \}$.

(7.4.5) Seien (T, s) und (T', s') aus K , dann gelte

$(T, s) \leq (T', s')$ genau dann wenn

$$r(T, s) := \sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i \int_M s_i(m) d\pi_i(m) \leq r(T', s') \quad \text{gilt.}$$

Wie man sieht, haben wir in (7.4.3)b) eine weitere Abschwächung der Voraussetzungen vorgenommen.

(7.5) Definitionen

(7.5.0) $r(T, s)$ gemäß (7.4.5) heißt Bayes-Risiko des Tests (T, s) ,

(7.5.1) eine Lösung (T^*, s^*) eines Testproblems der Klasse III heißt Bayes-Lösung.

(7.6) Bemerkungen

(7.6.0) Für alle u aus $Q(m, z)$ gilt $|u_i| \leq b(m)$ für alle i aus $\mathbb{N}$,
 (m, z) aus $M \times [0, +\infty)$.

(7.6.1) Die Integralsummen in (7.4.5) sind wohldefiniert.

(7.6.2) $g(\cdot, Q(m, z))$ ist stetig auf I_1 für alle (m, z) aus $M \times [0, +\infty)$.

Beweis:

(7.6.0) folgt unmittelbar aus (7.4.3b).

$s: (M, \mathbb{K}_T) \rightarrow (I_\infty \cup \{\infty\}, B(I_\infty, I_1) \cup \{\infty\})$ ist meßbar genau dann, wenn für alle i aus $\mathbb{N}$ die Abbildung $s_i: (M, \mathbb{K}_T) \rightarrow (R, B(R))$ meßbar ist.

$$\begin{aligned} \int_M |s_i(m)| dp_i(m) &\leq \int_M c(T(m)) dp_i(m) + \int_M |q_i(m)| dp_i(m) \\ &\leq \int_M c(T(m)) dp_i(m) + \int_M b(m) dp_i(m) < +\infty \quad \text{wegen} \end{aligned}$$

(7.4.4), (7.6.0) und (7.4.3b), d.h. die in den Summen auftretenden Integrale sind wohldefiniert.

Ferner gilt:

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i \int_M |s_i(m)| dp_i(m) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i \int_M c(T(m)) dp_i(m) + \sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i \int_M b(m) dp_i(m)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i \int_M |s_i(m)| dp_i(m) \\ \leq \int_M c(T(m)) \sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i f_i(m, \infty) d\mathbb{P}(m) + \int_M b(m) \sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i f_i(m, \infty) d\mathbb{P}(m) \\ = \mathbb{E}(c(T(\cdot))) + \mathbb{E}(b(\cdot)) < \infty \text{ nach (7.4.3)b) und (7.4.4) .} \\ (\text{n. (7.3.1)}) \end{aligned}$$

Aus $\sum_{i \in \mathbb{N}} |u_i x_i| \leq b(m) \|x\|_1$ für alle u aus $Q(m, z)$ und alle x aus l_1 folgt mittels 1) (Chap. II §5 prop. 2) die Behauptung (7.6.2).

Das weitere Vorgehen verläuft analog zu dem in den vorhergegangenen Paragraphen.

(7, 7) Lemma

Sei (T, s) aus K , dann gilt

$$r_i(T, s) := \int_M s_i(m) dp_i(m) = \int_M s_i(m) f_i(m, T(m)) d\mathbb{P}(m) \quad \text{für alle } i \text{ aus } \mathbb{N} .$$

Beweis: 9) V T 19 und VI T 13 .

(7, 8) Lemma

Zur Korrespondenz $(Q(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ existiert ein $(c_i f_i(\cdot, z))_{i \in \mathbb{N}}$ -optimaler Auswahlprozeß $(v(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$.

Beweis:

Wir haben einfach die Gültigkeit der Voraussetzungen des Korollars (1.12) nachzuprüfen.

$(1_\infty, \zeta(1_\infty, 1_1))$ und $(1_1, \gamma_{11})$ erfüllen die Voraussetzungen aus (1.12).

$K' := \{ p \in l_1 : p_i \geq 0 \text{ für alle } i \text{ aus } \mathbb{N} \}$ ist ein konvexer Kegel und $\text{span } K' = l_1$.

$Q(m, z)$ ist abgeschlossen und konvex, wegen (7.6.2) und (7.4.2)c) erfüllt $(Q(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ somit alle in (1.12) gemachten Voraussetzungen.

Seien nun x aus l_1 und $c > 0$ gegeben. Mit $\pi \circ f(m, z) := (\pi_i f_i(m, z))_{i \in \mathbb{N}}$

gilt: $\{ (m, z) \in M \times [0, s] : \|\pi \circ f(m, z) - x\| < c \}$

$= \{ (m, z) \in M \times [0, s] : \sum_{i \in \mathbb{N}} |\pi_i f_i(m, z) - x_i| < c \}$ ist, wegen der

progressiven Meßbarkeit der f_i , aus $K_{\mathbb{S}} \cap \text{IB}([0, s])$ für alle s aus

$[0, +\infty)$. Damit erfüllt der Prozeß $(\pi \circ f(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ die in (1.12)

gestellten Voraussetzungen und unser Lemma ist bewiesen.

Es ergibt sich damit sofort:

(7.9) Satz

Sei T_0 eine Stopzeit die der Bedingung in (7.4.4) genügt.

s_0 definiert gemäß $s_0(m) := \begin{cases} c(T_0(m))1_{\mathbb{N}} + v(m, T_0(m)), & \text{falls } T_0(m) < \infty, \\ \vec{\infty} & \text{sonst,} \end{cases}$

ist eine optimale Schadensfunktion zu T_0 .

Auch jetzt reduziert sich damit das Problem der Konstruktion einer

Bayes-Lösung auf ein Problem des optimalen Stoppens. Der zu

stoppende Prozeß $(-G(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ ist diesmal definiert gemäß

$G(m, z) := \sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i f_i(m, z)(c(z) + v_i(m, z))$ für (m, z) aus $M \times [0, +\infty)$.

Ähnlich wie in §5 zeigt man $\lim_{z \rightarrow \infty} -G(m, z) = -\infty$ für IP-fast alle m aus M und setzt wieder $-G(m, \infty) = -\infty$ für alle m aus M .

Wir benötigen jetzt wieder die folgende Zusatzvoraussetzung.

(7.10) Zusatzvoraussetzung

(7.10.0) Der Prozeß $(-G(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ sei rechtsstetig und

(7.10.1) der erweiterte Prozeß $(-G(\cdot, z))_{0 \leq z \leq \infty}$ im IP-Mittel quasiüberhalbstetig von links.

Damit können wir den abschließenden Satz dieses Paragraphen formulieren.

(7.11) Satz

Sei $(\{p_\theta : \theta \in \Theta\}, (E, \mathcal{F}_E), \{S(m, z) : (m, z) \in M \times Z\}, K, \leq)$ ein sequentielles Testproblem der Klasse III, welches (7.10) erfüllt, dann gibt es eine Bayes-Lösung (T^*, s^*) in K .

Beweis:

Es genügt wieder zu zeigen, daß die Voraussetzungen des Stopzeittheorems aus dem Anhang erfüllt sind, alles weitere läuft analog zum Beweis von (5.8).

$$a) -G(m, z) = - \sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i f_i(m, z)(c(z) + v_i(m, z)) \leq b(m);$$

b) $-G(\cdot, z)$ ist IP-integrierbar für alle z aus $[0, +\infty)$.

Aus a) , b) und (7.10) folgt dann die Behauptung.

§8 Beispiele

Gesucht sei die Verteilung einer reellen Zufallsgröße X . Aus theoretischen Vorüberlegungen weiß man, daß X eine Gauß-Verteilung mit Erwartungswert α und Varianz σ^2 besitzt. α und σ^2 sind unbekannt, aber wir wollen zunächst annehmen, daß für α eine obere Schranke α_o und eine untere Schranke α_u bekannt seien. Auch σ^2 soll nach unten durch ein $\sigma_u^2 > 0$, nach oben durch σ_o^2 beschränkt sein. Ferner nehmen wir an, daß sich die Verteilung von X mit der Zeit nicht ändert.

Aus meßtechnischen Gründen sei es zum Zeitpunkt z aus $[0, +\infty)$ nur möglich, Werte von X zu messen, die zwischen zwei Grenzen $h_1(z)$ und $h_2(z)$ liegen, oder festzustellen, daß der Wert von X ausserhalb des Intervalls $[h_1(z), h_2(z)]$ liegt. Wir wollen dabei annehmen, daß für alle z aus $[0, +\infty)$ $h_1(z) \leq h_2(z)$ gilt, die Funktion h_1 monoton fallend, die Funktion h_2 monoton steigend sei. Ausserdem sollen beide Funktionen rechtsstetig sein und $\lim_{z \rightarrow \infty} h_1(z) = -\infty$ bzw. $\lim_{z \rightarrow \infty} h_2(z) = +\infty$ gelten.

Die Elemente des sequentiellen Testproblems, die wir bisher bestimmt haben, sind also die folgenden:

$(M, \mathbb{K}) := (\mathbb{R}, \mathbb{L}(\mathbb{R}))$, wobei $\mathbb{L}(\mathbb{R})$ die Lebesgue'schen Mengen seien.

$$\{p_\theta : \theta \in \Theta\} := \left\{ \mathcal{N}(\alpha, \sigma^2) : (\alpha, \sigma^2) \in [\alpha_u, \alpha_o] \times [\sigma_u^2, \sigma_o^2] \right\}.$$

$$\hat{\mathbb{K}}_z := \{ A \in \mathbb{K} : A \subset [h_1(z), h_2(z)] \text{ oder } [A \subset [h_1(z), h_2(z)]] \} .$$

$$\mathbb{K}_z := \{ B \in \mathbb{K} : \exists A \in \hat{\mathbb{K}}_z \text{ mit } \lambda(A \Delta B) = 0 \} , \text{ dabei sei } \lambda \text{ das}$$

Lebesgue-Maß .

(8.0) Lemma

$(\mathbb{K}_z)_{0 \leq z < \infty}$ ist eine monoton wachsende, rechtsstetige Familie von Untersigmaalgebren von $\mathbb{K}$, es gilt $\mathbb{K}_0 \supset \{ N \in \mathbb{K} : \lambda(N) = 0 \}$ und $\mathbb{K}_\infty = \mathbb{K}$.

Beweis:

a) Wir zeigen zunächst: $(\hat{\mathbb{K}}_z)_{0 \leq z < \infty}$ ist eine monoton wachsende und rechtsstetige Familie von Sigmaalgebren.

Sei $z_1 \leq z_2$ gegeben, dann ist $[h_1(z_1), h_2(z_1)] \subset [h_1(z_2), h_2(z_2)]$

wegen der Monotonieeigenschaften der $h_i, i=1,2$, also gilt

$$\hat{\mathbb{K}}_{z_1} \subset \hat{\mathbb{K}}_{z_2} .$$

Sei nun $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine von rechts gegen ein z_0 aus $[0, +\infty)$ konvergierende Folge und A aus $\hat{\mathbb{K}}_{z_n}$ für alle n aus $\mathbb{N}$, o. B. d. A. ist $z_n \searrow z_{n+1}$ für alle n aus $\mathbb{N}$.

Dann gilt wegen $[h_1(z_n), h_2(z_n)] \supset [h_1(z_{n+1}), h_2(z_{n+1})] \supset \dots$

entweder $A \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [h_1(z_n), h_2(z_n)] = [h_1(z_0), h_2(z_0)]$ (wegen der

Rechtsstetigkeit der $h_i, i=1,2$) oder $A \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [h_1(z_n), h_2(z_n)]$,

d. h. $A \in \hat{\mathbb{K}}_{z_0}$, also gilt $\hat{\mathbb{K}}_{z_0} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{\mathbb{K}}_{z_n}$.

($A \subset [h_1(z_n), h_2(z_n)]$ und $[A \subset [h_1(z_m), h_2(z_m)]]$ für $m \neq n$ ist ausgeschlossen, weil A und $[A$ nicht gleichzeitig beschränkt sein können

Was uns zunächst noch fehlt ist die Aussage, daß die $\hat{\mathbb{K}}_z$ Sigmaalgebren sind.

Mit A ist wegen $\bigcap (A) = A$ auch A aus $\hat{\mathbb{K}}_z$.

$\emptyset$ und $\mathbb{R}$ sind trivialerweise in $\hat{\mathbb{K}}_z$ für jedes z . Sei nun $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus $\hat{\mathbb{K}}_z$.

1. Fall: Für alle n aus $\mathbb{N}$ gelte $A_n \subset [h_1(z), h_2(z)]$ und

somit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset [h_1(z), h_2(z)]$, also ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ aus $\hat{\mathbb{K}}_z$.

2. Fall: Es gebe mindestens ein n_0 aus $\mathbb{N}$ mit $A_{n_0} \subset [h_1(z), h_2(z)]$.

Dann ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [A_n \subset A_{n_0} \subset [h_1(z), h_2(z)]]$,

also $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ aus $\hat{\mathbb{K}}_z$.

b) Für den Beweis der entsprechenden Aussagen für die $\mathbb{K}_z$, sehe man sich einfach den Beweis von (2.6) an.

c) Offensichtlich gilt $\mathbb{K}_\infty = \mathbb{K}$.

Wir wollen jetzt mit unserer Konstruktion weitermachen. Als

Maß $\mathbb{P}$ wählen wir um der einfacheren Rechnung willen das durch die Dichte $2^{-1}e^{-|m|}$ gegebene, zum Lebesgue-Maß äquivalente W-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$. Die Dichten $f'(\cdot, \theta, z)$, $\theta = (\alpha, \sigma^2) \in [\alpha_u, \alpha_o] \times [\sigma_u^2, \sigma_o^2]$, ergeben sich dann zu

$$f'(m, \theta, z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-|m| - \frac{(m-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right) 1_{[h_1(z), h_2(z)]}^{(m)}$$

$$+ (\mathbb{P}([h_1(z), h_2(z)]))^{-1} p_\theta([h_1(z), h_2(z)]) 1_{[h_1(z), h_2(z)]}^{(m)}.$$

Diese Dichten besitzen eine Reihe wichtiger Eigenschaften.

(8.1) Lemma

(8.1.0) Für festes (m, θ) aus $\mathbb{R} \times \Theta$ ist

$f'(m, \theta, \cdot) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ rechtsstetig.

(8.1.1) Es gilt für alle (m, θ)

$$f'(m, \theta, \infty) \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi\zeta_u^2}} \exp\left(\frac{\zeta_\theta^2}{2} + \max(|\alpha_u|, |\alpha_\theta|)\right),$$

$f'(\cdot, \cdot, \infty)$ erfüllt (4.8.4).

(8.1.2) Für festes $(m, z) \in \mathbb{R} \times Z$ ist $f'(m, \cdot, z) : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Θ sei dabei mit der vom $\mathbb{R}^2$ induzierten Topologie versehen.

Beweis:

a) Wie man sofort sieht, ist $f'(\cdot, \cdot, z)$ von der Form

$$f'(\cdot, \cdot, \infty) 1_{[h_1(z), h_2(z)]} + (\mathbb{P}([h_1(z), h_2(z)]))^{-1} p_\theta([h_1(z), h_2(z)]) 1_{[h_1(z), h_2(z)]}$$

Sei nun z_0 aus $[0, +\infty)$ und sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine von rechts gegen z_0 konvergierende Folge.

1. Fall: $m \in [h_1(z_0), h_2(z_0)]$, damit existiert ein n_0 aus $\mathbb{N}$ so, daß

$m \in [h_1(z_n), h_2(z_n)]$ für alle $n \geq n_0$, also

$$f'(m, \theta, z_n) = (\mathbb{P}([h_1(z_n), h_2(z_n)]))^{-1} p_\theta([h_1(z_n), h_2(z_n)])$$

für alle $n \geq n_0$ und alle θ aus Θ .

$$\text{Wegen } [h_1(z_0), h_2(z_0)] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [h_1(z_n), h_2(z_n)]$$

folgt aus der sigma-Additivität von $\mathbb{P}$ und aller p_θ die behauptete Rechtsstetigkeit.

2. Fall: $m \in [h_1(z_0), h_2(z_0)]$, damit gilt für alle n aus $\mathbb{N}$

$$m \in [h_1(z_n), h_2(z_n)] \quad \text{also}$$

$$f'(m, \theta, z_n) = f'(m, \theta, \infty) = f'(m, \theta, z_0) \quad \text{für alle } n \text{ aus } \mathbb{N}$$

und die Behauptung (8.1.0) ist bewiesen.

b) Es gilt

$$\begin{aligned} f'(m, \theta, \infty) &\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}} \sup \left\{ \exp(|m| - \frac{(m-\alpha)^2}{2\sigma^2}) : m \in \mathbb{R}, (\alpha, \sigma^2) \in \Theta \right\} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}} \sup \left\{ \exp(\frac{\sigma^2}{2} + |\alpha|) : (\alpha, \sigma^2) \in \Theta \right\}, \end{aligned}$$

wie man durch Differenzieren der Funktionen $\exp(\pm m - \frac{(m-\alpha)^2}{2\sigma^2})$

feststellt.

c) 1.) In dem Falle, daß m aus $[h_1(z), h_2(z)]$ ist, gilt

$$f'(m, (\alpha, \sigma^2), z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp(|m|) (\sigma^2)^{-1/2} \exp(-\frac{(m-\alpha)^2}{2\sigma^2}).$$

Nun hängen $(\sigma^2)^{-1}$ und $(m-\alpha)^2$ für festes m stetig von (α, σ^2) ab, also auch f' .

2.) In dem Falle, daß m aus $[h_1(z), h_2(z)]$ ist, gilt

$$f'(m, (\alpha, \sigma^2), z) = (\mathbb{P}(\cap [h_1(z), h_2(z)]))^{-1} p_\theta(\cap [h_1(z), h_2(z)]),$$

wobei

$$p_{(\alpha, \sigma^2)}(\cap [h_1(z), h_2(z)]) = \frac{\int_{\cap [h_1(z), h_2(z)]} (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp(-\frac{(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}) dt}{\int_{\cap [h_1(z), h_2(z)]}}$$

wegen des Konvergenzsatzes von Lebesgue stetig von (α, σ^2) abhängt.

Es sei weiterhin (aus bisherigen Erfahrungen bzw. theoretischen Vorüberlegungen) ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathcal{B}(\Theta)$ gegeben. $\mathcal{D}$ sei die Vervollständigung von $\mathcal{B}(\Theta)$ bezüglich μ .

Es gilt das folgende Lemma.

(8.2) Lemma

$(\mu, \mathcal{D})$ ist eine Bayesvorbewertung gemäß (4.5).

Beweis:

Wegen (8.1.2) gilt nach Lemma III. 14 aus 2), daß

(*) $f'(\cdot, \cdot, \omega) \in \mathcal{K}_{\omega} \cap \mathcal{B}(\Theta)$ meßbar ist.

Damit ist aber auch die Abbildung $\omega \mapsto \|f'(\cdot, \omega, \omega)\|$ von $(\Theta, \mathcal{D}, \mu)$ nach $L_1(M, \mathcal{K}, \mathcal{P})$ meßbar.

Die Separabilität von $\mathcal{D}$ ist klar und die Verträglichkeit von μ mit $\mathcal{P}$ folgt aus der Totalstetigkeit von $\mathcal{P}$ bezüglich jedem der p_{ω} .

Die Aussage (*) im Beweis von (8.2) liefert uns in Verbindung mit (8.1) sofort die folgende Aussage.

(8.3) Lemma

$(F^x(\cdot, \cdot, z))_{z \in \mathbb{Z}}$ kann gleich $(f'(\cdot, \cdot, z))_{z \in \mathbb{Z}}$ gewählt werden.

Um Beobachtungen vorzunehmen bzw. um den Beobachtungsbereich aus-
zudehnen, seien bis zum Zeitpunkt z Kosten $c(z)$ angefallen. Wir wollen
annehmen, daß die Funktion $c: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ nichtnegativ, stetig und monoton
wachsend sei. Ausserdem gelte $\lim_{z \rightarrow \infty} c(z) = +\infty$.

Ferner wollen wir annehmen, daß, wenn zum Zeitpunkt z nach Beobachtung
des Wertes m eine Entscheidung gefällt wird und p_θ die 'wahre' Ver-
teilung der Zufallsgröße X ist, ein Schaden $q(m, \theta, z)$ entsteht. Es soll
bekannt sein, daß $q(m, \theta, z)$ zwischen zwei Grenzen $g_u(m, \theta, z)$ und $g_o(m, \theta, z)$,
 $g_u(m, \theta, z) \leq g_o(m, \theta, z)$, liegt und daß jeder Wert zwischen diesen beiden
Grenzen möglich ist. Im Richter'schen Modell interessiert man sich dabei
nicht so sehr für die konkrete Gestalt der 'Entscheidungsfunktion', (siehe [1])
sondern unterscheidet Entscheidungen ausschließlich nach den Schäden,
die sie verursachen. Entscheidung ist hierbei immer im Sinne von Ter-
minalentscheidung zu verstehen, d.h. also, wenn eine Entscheidung ge-
troffen wurde, wird nicht weiter beobachtet.

Aus den Modellannahmen und dem in den Paragraphen eins bis sieben
entwickelten mathematischen Apparat ergeben sich eine Reihe von For-
derungen an die Grenzfunktionen $g_i, i=u, o$.

(8.4) Voraussetzungen

Die Funktionen $g_i: (\mathbb{R} \times \Theta \times [0, +\infty)) \rightarrow \mathbb{R}, i=u, o$, seien derart, daß gilt:

(8.4.0) Die Familien $\{g_i(\cdot, \theta, \cdot) : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : \theta \in \Theta\}$, $i=u, o$,
sind gleichgradig stetig.

(8.4.1) Es existieren $\mathbb{P} \otimes \mu$ -integrierbare Funktionen b_u und b_o so, daß $b_u(m, \theta) \leq g_u(m, \theta, z) \leq g_o(m, \theta, z) \leq b_o(m, \theta)$ für alle z aus $[0, +\infty)$ und alle (m, θ) gilt.

Ausserdem sei für alle m aus $\mathbb{R}$ sowohl $b_u(m, \cdot)$ als auch $b_o(m, \cdot)$ bezüglich μ integrierbar.

(8.4.2) $g_i(m, \cdot, z) : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$, $i=u, o$, ist für alle (m, z) $\mathbb{D}$ -meßbar.

(8.4.3) $\text{essinf}(g_o(m, \cdot, z) - g_u(m, \cdot, z)) > 0$ für alle (m, z) .

(8.4.4) Für alle z aus $[0, +\infty)$ gilt, daß $g_i(\cdot, \theta, z)$ für alle θ aus Θ ausserhalb $[h_1(z), h_2(z)]$ konstant ist, $i=u, o$.

Man fragt sich natürlich ob eine solche Menge von Voraussetzungen überhaupt erfüllbar ist. Nun hängen in vielen Fällen (siehe auch Teil 3 dieses Paragraphen) die g_i nur von einer oder sogar von keiner der drei Koordinaten ab, dann ist die Situation natürlich gleich einfacher.

Ein etwas komplizierteres Beispiel ist für den Spezialfall $h_1(z) := -z$ und $h_2(z) := z$ die Funktion

$$(m, \theta, z) \mapsto (\zeta^2)^{-1} (m^2 1_{[-z, z]}(m) + z^2 1_{[-z, z]}(m) + (z^2 - \alpha^2) 1_{[0, |\alpha|)}(z)) ,$$

$\theta = (\alpha, \zeta^2)$ wie oben.

Für unsere Schadensbereiche ergibt sich also folgende Beschreibung:

$$S(m, z) := c(z) (1_{\{0\}} + \{ u \in L_1(\Theta, \mathbb{D}, \mu) : g_u(m, \theta, z) \leq u(\theta) \leq g_o(m, \theta, z) \} \mu\text{-f.})$$

für alle (m, z) aus $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$.

(8.5) Lemma

Für die Familie von Korrespondenzen $(Q(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ gemäß

$$Q(m, z) := \left\{ u \in L_1(\Theta, \mathbb{D}, \mu) : g_u(m, \theta, z) \leq u(\theta) \leq g_o(m, \theta, z) \quad \mu\text{-f. ü.} \right\}$$

gilt:

(8.5.0) $Q(m, z)$ ist $\mathcal{C}(L_1, L_\infty)$ abgeschlossen für alle (m, z) aus

$$\mathbb{R} \times [0, +\infty).$$

(8.5.1) $(Q(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ ist bezüglich $(\mathbb{K}_z)_{0 \leq z < \infty}$ progressiv innen-meßbar.

Beweis:

a) Da $Q(m, z)$ konvex ist, folgt die Behauptung mittels V. 3.13 aus
)4(aus der Abgeschlossenheit in der Normtopologie.

b) Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

1. Beh.: Sei $O \subseteq L_1$ offen, dann gilt: $(Q^x)^{-1}(O)$ ist offen in
 $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$. (Q^x siehe (1.4))

Bew.:

$$(Q^x)^{-1}(O) = \left\{ (m, z) : \exists h \in O \text{ so, daß } g_u(m, \theta, z) \leq h(\theta) \leq g_o(m, \theta, z) \quad \mu\text{-f. ü.} \right\}$$

Sei nun (m_o, z_o) aus $(Q^x)^{-1}(O)$, h ein zugehöriges Element aus O .

Dann existiert wegen der Offenheit von O ein $\epsilon > 0$ so, daß

$$\{ k \in L_1 : \|h - k\| < \epsilon \} \subset O. \text{ Man wähle } \delta > 0 \text{ so, daß auch}$$

$$\delta < 2^{-1} \text{essinf}(g_o(m_o, \cdot, z_o) - g_u(m_o, \cdot, z_o)) \text{ ist. Dann gilt:}$$

$$\left\{ \theta : h(\theta) \leq g_u(m_o, \theta, z_o) + \delta \right\} \cap \left\{ \theta : h(\theta) \geq g_o(m_o, \theta, z_o) - \delta \right\} \text{ ist eine } \mu\text{-Nullmenge.}$$

Sei nun $\eta := \min(\varepsilon/2, \operatorname{essinf}(g_0(m_0, \dots, z_0) - g_u(m_0, \dots, z_0)) - 2\delta)$,
 η ist größer als 0.

Wir definieren eine neue Funktion $k: \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt:

$$k := h^1 \{ g_u + \delta < h < g_0 - \delta \} + (h + \eta)^1 \{ h \leq g_u + \delta \} + (h - \eta)^1 \{ h \geq g_0 - \delta \}.$$

Dann gilt mit $\eta_0 := \min(\delta, \eta) > 0$,

$\operatorname{essinf}(k - g_u(m_0, \dots, z_0)) \geq \eta_0 > 0$ und $\operatorname{essinf}(g_0(m_0, \dots, z_0) - k) \geq \eta_0 > 0$
 also ist k insbesondere wieder aus $Q(m_0, z_0)$.

Außerdem gilt $\int_0 |h(\theta) - k(\theta)| d\mu(\theta) \leq \int_0 \eta d\mu(\theta) \leq \varepsilon/2$, also ist
 k auch aus O .

Wegen (8.4.0) existiert ein $\delta_0 > 0$ so, daß für alle (m, z) aus

$\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ mit $\|(m, z) - (m_0, z_0)\|_e < \delta_0$

$\max(|g_u(m, \theta, z) - g_u(m_0, \theta, z_0)|, |g_0(m, \theta, z) - g_0(m_0, \theta, z_0)|) < \eta_0/2$

für alle θ aus Θ gilt. ($\|\cdot\|_e$ bezeichne die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$)

Damit gilt für solche (m, z)

$\operatorname{essinf}(k - g_u(m, \dots, z)) \geq \operatorname{essinf}(k - g_u(m_0, \dots, z_0)) - \eta_0/2 \geq \eta_0/2 > 0$

und

$\operatorname{essinf}(g_0(m, \dots, z) - k) \geq \operatorname{essinf}(g_0(m_0, \dots, z_0) - k) - \eta_0/2 \geq \eta_0/2 > 0$.

Damit ist (m, z) aus $(Q^x)^{-1}(O)$ und unsere erste Behauptung ist
 bewiesen.

2. Beh.: $B := ((Q^x)^{-1}(O) \cap (\mathbb{R} \times [0, s])) \cap \left(\int [h_1(s), h_2(s)]^* \times [0, s] \right)$

$$= \left(\int [h_1(s), h_2(s)] \right) \times \operatorname{proj}_Z(B), \quad s \text{ aus } [0, +\infty) \text{ beliebig}$$

aber fest.

Bew.:

'c' trivial .

'>' Sei (m_0, z_0) aus $\left[[h_1(s), h_2(s)] \times \text{proj}_Z(B) \right]$ und damit auch aus $\left[[h_1(s), h_2(s)] \times [0, s] \right]$.

Es existiert nun ein m_1 aus $\left[[h_1(s), h_2(s)] \right]$ so, daß (m_1, z_0) aus B ist, insbesondere ist damit (m_1, z_0) aus $(Q^X)^{-1}(O) \cap \mathbb{R}x[0, s]$.

Damit gibt es ein h aus O mit $g_u(m_1, \theta, z_0) \leq h(\theta) \leq g_o(m_1, \theta, z_0)$ für μ -fast alle θ .

Wegen m_0, m_1 aus $\left[[h_1(s), h_2(s)] \right]$ und (8.4.3) gilt

$g_u(m_0, \theta, z_0) = g_u(m_1, \theta, z_0) \leq h(\theta) \leq g_o(m_1, \theta, z_0) = g_o(m_0, \theta, z_0)$ μ -f. ü. , also (m_0, z_0) aus $(Q^X)^{-1}(O) \cap \mathbb{R}x[0, s]$.

3. Beh.: $(Q^X)^{-1}(O) \cap (\mathbb{R}x[0, s])$ ist aus $K_S \boxtimes \mathbb{B}([0, s])$.

Bew.: $(Q^X)^{-1}(O) \cap (\mathbb{R}x[0, s])$

$$= B \cup ((Q^X)^{-1}(O) \cap ([h_1(s), h_2(s)] \times [0, s])) .$$

B ist offen in $\mathbb{R}x[0, s]$ nach 1.) . Damit ist $\text{proj}_Z(B)$

offen in $[0, s]$ und damit wegen 2.) B aus $K_S \boxtimes \mathbb{B}([0, s])$.

$(Q^X)^{-1}(O)$ ist nach 1.) offen in $\mathbb{R}x[0, \infty)$ also ist

$(Q^X)^{-1}(O) \cap ([h_1(s), h_2(s)] \times [0, s])$ aus $\mathbb{B}([h_1(s), h_2(s)] \times [0, s])$ und damit aus $K_S \boxtimes \mathbb{B}([0, s])$.

Mit Behauptung 3.) ist auch (8.5.1) bewiesen .

Damit haben wir alle konstituierenden Elemente eines sequentiellen Testproblems bestimmt, und die vorangegangenen Lemmata zeigen, daß alle Voraussetzungen für ein Testproblem 1. Art erfüllt sind. Es bleibt noch die Frage ob dieses Beispiel auch die Zusatzvoraussetzung (5.7) erfüllt.

Für den Prozeß $(G(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ gilt in unserem Fall

$$G(m, z) = \int_0^z (c(z) + g_u(m, \theta, z)) f'(m, \theta, z) d\mu(\theta).$$

Die Rechtsstetigkeit dieses Prozesses folgt unmittelbar aus der Stetigkeit von c und $g_u(m, \theta, \cdot)$ und der Rechtsstetigkeit von $f'(m, \theta, \cdot)$ (siehe (8.1)) für alle (m, θ) mittels des Konvergenzsatzes von Lebesgue.

Sei T aus $\mathbb{T}$ und $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton von unten gegen T konvergierende Folge von Stopzeiten.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G(\cdot, T_n(\cdot))) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{\cdot} (c(T_n(\cdot)) + g_u(\cdot, \theta, T_n(\cdot))) f'(\cdot, \theta, T_n(\cdot)) d\mu(\theta) \right) d\mathbb{P} \\ &= \int_0^{\cdot} \mathbb{E}((c(T_n(\cdot)) + g_u(\cdot, \theta, T_n(\cdot))) f'(\cdot, \theta, T_n(\cdot))) d\mu(\theta) \quad (*) \end{aligned}$$

und analog für T .

Es gilt dann

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}((c(T_n(\cdot)) + g_u(\cdot, \theta, T_n(\cdot))) f'(\cdot, \theta, T_n(\cdot))) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}((c(T_n(\cdot)) + g_u(\cdot, \theta, T_n(\cdot))) f'(\cdot, \theta, \infty)) \quad (\text{nach } 9(\text{VI T } 13)) \\ &= \mathbb{E}((c(T(\cdot)) + g_u(\cdot, \theta, T(\cdot))) f'(\cdot, \theta, \infty)) \quad (\text{wegen der Stetigkeit}) \\ &= \mathbb{E}((c(T(\cdot)) + g_u(\cdot, \theta, T(\cdot))) f'(\cdot, \theta, T(\cdot))) \quad (9(\text{VI T } 13)) \end{aligned}$$

für μ -fast alle θ und wegen (*) die Quasiunterhalbstetigkeit von links.

(Bei den Vertauschungen der limites mit den Integralen kann stets der Konvergenzsatz von Lebesgue angewendet werden.)

Für T nicht aus T folgt die gewünschte Ungleichung aus dem Lemma von Fatou, angewandt auf $(\int_0^1 c(T_n(\cdot)) F^x(\cdot, \theta, T_n(\cdot)) d\pi(\theta))_{n \in \mathbb{N}}$.

Wir haben somit also die Gültigkeit von (5.7) nachgewiesen, das vorgelegte Problem besitzt eine Bayes-Lösung 1. Art.

Für ein zweites Beispiel wollen wir wieder eine ähnliche Problemstellung benutzen, allerdings lassen wir jetzt die Einschränkungen an α völlig fallen und für ζ^2 soll nur noch eine untere Schranke $\zeta_{\alpha}^2 > 0$ bestehen. Wir haben also $\Theta = \mathbb{R} \times [\zeta_{\alpha}^2, \infty)$. Wie oben sei wieder μ ein beliebiges W-Maß auf $\mathcal{B}(\Theta)$ und $(\Theta, \mathcal{B}, \mu)$ die Vervollständigung von $(\Theta, \mathcal{B}(\Theta), \mu)$.

Welche der oben gemachten Aussagen bleiben dann noch richtig?

Wie ein kurzer Blick auf die Beweise zeigt, sind (8.0), (8.1.0), (8.1.2), (8.2) und (8.3) auch weiterhin gültig. (8.1.1) hingegen wird falsch.

Es gilt aber

(8.1.1)' $f'(m, (\alpha, \zeta^2), z) \leq \max(\exp(|m|) \zeta_{\alpha}^{-1}, (\mathbb{P}((-\infty, m]))^{-1}, (\mathbb{P}([m, +\infty)))^{-1})$
d.h. $(f'(\cdot, \cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ erfüllt die Bedingung (4.11.4).

Wir wollen jetzt wieder annehmen, daß, wenn zum Zeitpunkt z nach Beobachtung des Wertes m eine Entscheidung gefällt wird und θ aus Θ der 'wahre' Parameterwert ist, ein Schaden $q(m, \theta, z)$ entsteht, von dem bekannt ist, daß er zwischen $g_u(m, \theta, z)$ und $g_o(m, \theta, z)$ liegt, $g_u(m, \theta, z) \leq g_o(m, \theta, z)$ für alle (m, θ, z) . Ausserdem soll wieder jeder Wert aus $g_u(m, \theta, z), g_o(m, \theta, z)$ möglich sein.

Wir stellen jetzt allerdings andere Forderungen an g_u und g_o .

(8.6) Voraussetzungen

$g_i, i=u, o$ sei derart, daß gilt:

(8.6.0) $g_i(., \theta, .) : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist für alle θ aus Θ stetig;

(8.6.1) es existiert b aus $\mathbb{R}$ so, daß

$$\sup \{ |g_i(m, \theta, z)| : i=u, o, (m, \theta, z) \in \mathbb{R} \times \Theta \times [0, \infty) \} \leq b$$

gilt;

(8.6.2) Für alle z aus $[0, +\infty)$ ist $g_u(., \theta, z) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für alle θ aus Θ ausserhalb $[h_1(z), h_2(z)]$ konstant.

Unsere Schadensbereiche werden jetzt also, mit der selben Kostenfunktion wie oben, beschrieben durch

$$S(m, z) := c(z) \cap 1_{\Theta} + \left\{ u \in L_{\infty}(\Theta, \mathbb{D}, \cdot) : g_u(m, \theta, z) \leq u(\theta) \leq g_o(m, \theta, z) \mu\text{-f. ü.} \right\}$$

Wir können sagen, wir haben ein Beispiel eines sequentiellen Testproblems 2. Art konstruiert, denn es gilt das folgende Lemma.

(8.7) Lemma

Für die Familie von Korrespondenzen $(Q(., z))_{0 \leq z < \infty}$ gemäß

$$Q(m, z) := \left\{ u \in L_{\infty} : g_u(m, \theta, z) \leq u(\theta) \leq g_o(m, \theta, z) \mu\text{-f. ü.} \right\} \quad \text{gilt:}$$

(8.7.0) $Q(m, z)$ ist $G(L_{\infty}, L_1)$ abgeschlossen für alle (m, z) aus $\mathbb{R} \times [0, \infty)$.

(8.7.1) Mit $K' := \{u' \in L_1 : u'(\theta) \geq 0 \text{ } \mu\text{-f.}\ddot{u}. \}$ ist die Familie

$$(Q(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty} \text{ progressiv } K'\text{-me\ss} \text{bar.}$$

Beweis:

a) Sei $v \notin Q(m, z)$. O. B. d. A. gilt dann f\ur A := $\{ \theta : v(\theta) < g_u(m, z, \theta) \}$
 $\mu(A) > 0$.

Die Menge $\{ w \in L_\infty : \int_0^w(\theta) 1_A(\theta) d\mu(\theta) < \int_0^{g_u(m, \theta, z)} 1_A(\theta) d\mu(\theta) \}$
ist offen in $\mathfrak{B}(L_\infty, L_1)$, v ist aus dieser Menge und ihr Schnitt
mit $Q(m, z)$ ist leer.

b) Sei u' aus K' . Damit ist

$$g(u', Q(\cdot, z)) = \int_0^{u'(\theta)} g_u(\cdot, \theta, z) d\mu(\theta).$$

Wegen (8.6.2) ist $g(u', Q(\cdot, z))$ au\erhalb $[h_1(z), h_2(z)]$ konstant,
also folgt aus (8.6.0) (mittels)2(Lemma III.14 und)9(IV T47)
 $(g(u', Q(\cdot, z)))_{0 \leq z < \infty}$ ist progressiv-me\ssbar.

Auch in diesem Falle stellt sich die Frage, ob der Proze\ $(G(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$
gem\ $G(m, z) := \int_0^{c(z) + g_u(m, \theta, z)} f'(\theta) d\mu(\theta)$ die Regularit\ts-
bedingungen f\ur die Existenz einer optimalen Stopzeit erf\llt.

Die Rechtsstetigkeit von $(G(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ folgt wegen (8.1.1)' genauso
wie im ersten Fall.

Sei nun T eine Stopzeit aus $\mathbb{T}$, T_n eine monoton von unten gegen T
konvergierende Folge von Stopzeiten.

Dann gilt wieder

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(G(\cdot, T_n(\cdot))) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0 \mathbb{E}((c(T_n(\cdot)) + g_u(\cdot, \theta, T_n(\cdot)))f'(\cdot, \theta, T_n(\cdot)))d\mu(\theta) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0 \mathbb{E}((c(T_n(\cdot)) + g_u(\cdot, \theta, T_n(\cdot)))f'(\cdot, \theta, \infty))d\mu(\theta) \\
 &\quad (\text{Lebesgue}) \\
 &= \int_0 \mathbb{E}(\lim_{n \rightarrow \infty} (c(T_n(\cdot)) + g_u(\cdot, \theta, T_n(\cdot)))f'(\cdot, \theta, \infty))d\mu(\theta) \\
 &\quad (\text{Stetigkeit}) \\
 &= \int_0 \mathbb{E}((c(T(\cdot)) + g_u(\cdot, \theta, T(\cdot)))f'(\cdot, \theta, \infty))d\mu(\theta) \\
 &= \mathbb{E}(G(\cdot, T(\cdot))) .
 \end{aligned}$$

Für T mit $\int_0 \mathbb{E}(c(T(\cdot))f'(\cdot, \theta, T(\cdot)))d\mu(\theta) = +\infty$ folgt nach Fatou

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0 \mathbb{E}(c(T_n(\cdot))f'(\cdot, \theta, T_n(\cdot)))d\mu(\theta) = +\infty \quad \text{und somit, da}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0 \mathbb{E}(g_u(T_n(\cdot))f'(\cdot, \theta, T_n(\cdot)))d\mu(\theta) > -\infty, \quad \text{auch}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(G(T_n(\cdot))) = +\infty \quad \text{für jede von unten gegen } T \text{ konvergierende}$$

Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Stopzeiten.

$(G(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ erfüllt also die Zusatzvoraussetzung (6.5).

Zum Schluß dieses Paragraphen wollen wir noch ein Beispiel für ein sequentielles Testproblem vom Typ III angeben.

Die Problemstellung sei grundsätzlich dieselbe wie in den beiden zuvor behandelten Fällen.

Allerdings sei diesmal eine beliebige, aber abzählbare Menge von

Hypothesen $\{p_i: i \in \mathbb{N}\}$ zugelassen. $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sei eine Bayesvorbewertung

(siehe §7) und $\mathbb{P}$ das zu μ gehörige zur Menge $\{p_i: i \in \mathbb{N}\}$ äquivalente

W-Maß.

Dann gilt für die Dichten $f'(\cdot, i, z)$ wie oben

$$f'(m, i, z) = \begin{cases} f'(m, i, \infty) \frac{1}{[h_1(z), h_2(z)]^{(m)}} + \frac{p_i(\{[h_1(z), h_2(z)]\})}{IP(\{[h_1(z), h_2(z)]\})} \frac{1}{[h_1(z), h_2(z)]^{(m)}} & \text{falls } IP(\{[h_1(z), h_2(z)]\}) \neq 0 \\ f'(m, i, \infty) \frac{1}{[h_1(z), h_2(z)]^{(m)}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Analog wie in (8.1) folgert man die Rechtsstetigkeit dieser Dichten.

Diesmal wollen wir uns aber für die spezielle Form der Terminalentscheidung interessieren. Wir wollen annehmen „daß man sich zum Zeitpunkt z bei Vorliegen der Beobachtung m , falls man sich nicht entscheidet weiterzubeobachten, für eine bestimmte Hypothese p_j entscheidet. Wenn dabei i aus $\mathbb{N}$ der 'wahre' Parameterwert ist, soll für den Schaden gelten

$$s(m, i, z)_j = c(z) + (1 - \delta_{i,j}) \quad , \text{ mit der bekannten Kostenfunktion } c \text{ und dem Kronecker-Symbol } \delta_{i,j} .$$

Damit würden wir als Schadensbereiche die folgenden Mengen

$$\text{erhalten } S(m, z) = c(z)1_{\mathbb{N}} + \{(1 - \delta_{i,j})_{i \in \mathbb{N}} : j \in \mathbb{N}\} . \text{ Diese erfüllen}$$

nun aber offensichtlich nicht die in §7 genannten Voraussetzungen.

Wir benutzen stattdessen die folgenden Schadensbereiche

$$\begin{aligned} S(m, z) &:= c(z)1_{\mathbb{N}} + \{1_{\mathbb{N}} + q : q \in 1_{\infty}, 0 \leq q_i \text{ für alle } i \text{ und } \sum_{i=1}^{\infty} q_i \leq -1\} \\ &= (c(z) + 1)1_{\mathbb{N}} + \{q \in 1_{\infty} : 0 \leq q_i, \sum_{i=1}^{\infty} q_i \leq -1\} . \end{aligned}$$

Damit gilt dann, daß diese Schadensbereiche die Bedingungen aus (7.4) erfüllen, wir haben also ein Testproblem vom Typ III vorliegen.

Sei nun $u' \in l_1$ mit $u'_i \geq 0$ für alle i aus $\mathbb{N}$ und q aus $\{q \in l_\infty : 0 \leq q_i \text{ für alle } i \text{ und } \sum_{i \in \mathbb{N}} q_i \leq 1\}$ beliebig. j sei aus $\{i \in \mathbb{N} : u'_i = \max\{u'_r : r \in \mathbb{N}\}\}$.

Es ist dann

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} u'_i q_i + \sum_{i \in \mathbb{N}} u'_i \delta_{i,j} = \sum_{i \in \mathbb{N}} u'_i q_i + u'_j$$

$$\geq u'_j \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} q_i + 1 \right) \geq 0.$$

Wie man sieht, nimmt das Funktional u' sein Infimum auf den ursprünglich vorgelegten Schadensbereichen an, die optimalen Entscheidungen können also unter den ursprünglich zugelassenen gefunden werden, unser Problem hat sich also durch die Benutzung der geänderten Schadensbereiche nicht verändert.

Anhang

Satz über die Existenz optimaler Stopzeiten

$(M, \mathbb{K}, p)$ sei ein vollständiges W-Feld, $(\mathbb{K}_z)_{0 \leq z < \infty}$ eine monoton wachsende rechtsstetige Familie von Untersigmaalgebren von $\mathbb{K}$, für die $\mathbb{K}_0 \supset \{N \in \mathbb{K} : p(N)=0\}$ gilt; o. B. d. A. sei $\mathbb{K}_\infty := \bigcup_{0 \leq z < \infty} \mathbb{K}_z = \mathbb{K}$.

$(X(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ sei ein rechtsstetiger stochastischer Prozeß mit Werten in $\mathbb{R}$ und es gelte:

- a) $\lim_{z \rightarrow \infty} X(m, z) = -\infty$ für p -fast alle m ;
- b) Mit $X(m, \infty) := -\infty$ für alle m aus M ist der 'erweiterte' Prozeß $(X(\cdot, z))_{0 \leq z \leq \infty}$ im p -Mittel quasiüberhalbstetig von links.
- c) Es existiert ein rechtsstetiges, gleichgradig integrierbares Martingal $(Y(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ oberhalb $(X(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$.
- d) $\int_M X(m, z) dp(m)$ existiert eigentlich für alle z aus $[0, +\infty)$.

Dann existiert zu $(X(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ eine p -fast überall endliche, optimale Stopzeit T^* .

Beweis:

- 1.) Aus der Rechtsstetigkeit und den Bedingungen c) und d) folgt nach 2.5.1 aus)13(die Existenz des MRRCS $(\mathcal{Y}(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$ über $(X(\cdot, z))_{0 \leq z < \infty}$.
- 2.) $T^*(m) := \inf\{s \geq 0 : X(m, s) = \mathcal{Y}^*(m, s)\}$ ist dann wegen der Rechtsstetigkeit, den Bedingungen a) - d) und Teil 1.) dieses Beweises nach 2.8.7. aus)13(p -fast überall endlich. Hierbei beachte man, daß in)13(die Quasiüberhalbstetigkeit gefordert wird, aber zum Beweis von 2.8.7 nur die Bedingung b) benutzt wird.

3.) Wegen der Rechtsstetigkeit, den Bedingungen a)-d) und den Teilen 1.) und 2.) dieses Beweises folgt nach 2.8.6 aus)13(, daß T^* optimal ist . Dabei ist wieder wie in 2.) zu beachten, daß die in)13(geforderte Quasiüberhalbstetigkeit von links beim Beweis dieses Satzes durch Bedingung b) ersetzt werden kann.

Literaturverzeichnis

-) 1(N. Bourbaki Eléments de mathématique livre V
 Espaces vectoriels topologiques
 chap. I, II . Paris 1953
-) 2(Ch. Castaing , M. Valadier
 Convex Analysis and measurable Multi-
 functions
 Springer Lecture Notes in Mathematics
 580 , 1977
-) 3(G. Debreu Integration of correspondences
 Proc. 5th Berkeley Symp. in Math. Statistics
 and Probability , 2, 351 - 372, 1967
-) 4(N. Dunford - J. T Schwartz Linear Operators I
 New York, London 1958
-) 5(G. Köthe Topologische lineare Räume I
 2. verb. Auflage , Berlin, Heidelberg, New
 York 1966
-) 6(K. Kuratowski - C Ryll-Nardzewski
 A general theorem on selectors
 Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astronom.
 Phys. , vol. 13, 397-403, 1965
-) 7(V. Mammitzsch Bayes-Lösungen bei mehrstufigen Tests
 Z. f. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. ,
 19, 123-166, 1971
-) 8(V. Mammitzsch Sequenztest bei endlich vielen Hypothesen
 und kontinuierlicher Zeit
 Z. f. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.
 30, 217-225, 1974

- | | | |
|-------|---------------|--|
|) 9(| P. - A. Meyer | Probabilités et potentiel
Paris , 1966 |
|)10(| K. Pilzweger | Endlichstufige Tests bei nicht notwendig
endlich vielen Hypothesen
Dissertation, München 1971 |
|)11(| H. Richter | Endlichstufige Tests mit abhängigen Beobachtungen
Z. f. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.
2, 22-32, 1963 |
|)12(| H -G Seifert | Korrespondenzen: Ihre Anwendung auf ein
Gleichgewichtsproblem der Ökonomie
Dissertation, München 1973 |
|)13(| M Thompson | Some aspects of optimal stopping theory
Dissertation, University of Illinois, 1969
(Teile dieser Arbeit erschienen überarbeitet in Band 19 der
Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte
Gebiete, 1971) |
|)14(| R. Wegmann | Der Wertebereich von Vektorintegralen
Z. f. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.
14, 203-238, 1970 |
|) 15(| D. H. Wagner | Survey of measurable selection theorems
SIAM J. Control and Optimization
vol.15 , Nr. 5 August 1977 |

Tabellarischer Lebenslauf

Geburt: 1. 5. 1949 in München

Eltern: Franz-Xaver Mühlbauer ,Vorroller, und Elfriede
Mühlbauer geb. Wenzel

Schulen: 1955 - 59 Volksschule am Schererplatz in München-
Pasing
1959 - 68 Max-Planck - Gymnasium Pasing (früher
Oberrealschule München-Pasing)

Abitur: 1968

Studium: 1968 - 73 Mathematik an der Ludwigs-Maximilians-
Universität in München ,
während dieser Zeit Förderung durch das Hochbegabten-
förderungswerk des Bayerischen Begabtenförderungsgesetzes,
sog. 'Hundhammerstipendium' .

Vordiplom: 1970

Hauptdiplom: 1973

Thema der Diplomarbeit: Potentialtheorie für Markov-Ketten mit
separablem Zustandsraum

Oktober 1973 bis März 1974 wissenschaftliche Hilfskraft mit Abschluß
seit April 1974 wissenschaftlicher Angestellter am Fachbereich
Mathematik der Philipps-Universität Marburg/Lahn .

